Analiza wymiarowa

1. Międzynarodowy Układ Jednostek Miar SI

Układ jednostek to zbiór jednostek miar uznanych za *podstawowe* oraz innych jednostek, które nazywa się *pochodnymi*, które przez te podstawowe się wyrażają. Tak np. w układzie międzynarodowym SI jednostki długości, czasu i masy są traktowane jako jednostki podstawowe, natomiast jednostki siły, pędu i energii jako jednostki pochodne. Ta sama wielkość fizyczna może być w jednym układzie jednostką podstawową, a w innym jednostką pochodną. Jednostki pochodne tworzy się z jednostek podstawowych na podstawie praw fizycznych wiążących rozpatrywane wielkości. Przykładowo, jednostka siły niuton jako jednostka pochodna wyraża się poprzez jednostki podstawowe w postaci $N=kg \cdot m/s^2$ dlatego że istnieje prawo fizyczne (II zasada dynamiki Newtona) wiążące rozpatrywane wielkości.

Istnieje możliwość utworzenia wielu układów jednostek miar, które różniłyby się ilością i rodzajem podstawowych jednostek miar. Do pomyślenia jest zarówno układ, w którym byłaby tylko jedna jednostka podstawowa (pozostałe byłyby pochodnymi, otrzymanymi za pomocą praw fizycznych i wyrażonymi poprzez tą jedyną), jak i sytuacja odwrotna, gdy w układzie występowałyby jedynie jednostki podstawowe. Praktyczna stosowalność układu nakłada jednakże silne ograniczenia na ilość jednostek podstawowych.

Obowiązującym obecnie jest układ SI, bazujący na następujących siedmiu podstawowych jednostkach miar (obok nazwa danej jednostki i jej skrót):

L - jednostka długości ;	metr - m
M - jednostka masy:	kilogram - kg
T - jednostka czasu:	sekunda - s
I - jednostka natężenia prądu:	amper - A
Θ - jednostka temperatury termodynamicznej:	kelwin - K
J - jednostka światłości:	kandela - cd
N - jednostka ilości materii.	mol - mol

Każda wielkość fizyczna może być wyrażone jedynie poprzez te siedem jednostek miar. Przykładowo dla energii E, współczynnika przewodnictwa cieplnego λ, pojemności elektrycznej C i strumienia magnetycznego Φ mamy w układzie SI następujące wyrażenia wymiarowe:

$$[E] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \qquad [\lambda] = L \cdot M \cdot T^{-3} \cdot \Theta^{-1}$$

$$[C] = L^{-2} \cdot M^{-1} \cdot T^4 \cdot I^2 \qquad [\Phi] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot I^{-1}$$

Nawias kwadratowy informuje, ze rzecz dotyczy wymiaru wielkości, zaś wykładniki potęgowe informują o wymiarach danej wielkości względem odpowiednich jednostek miar. Możemy zatem powiedzieć, że np. energia E ma wymiar 2 względem jednostki długości, wymiar 1 względem jednostki masy i wymiar -2 względem jednostki czasu.

Jedną z zalet układu SI jest obecność w nim jednostek miar, które od dawna stosuje się w praktyce. Wadą jest natomiast konieczność wprowadzenia dwu stałych - stałej elektrycznej ε_0 i stałej magnetycznej μ_0 - w celu dopasowania jednostek mechanicznych z elektromagnetycznymi.

2. Zmiana wartości liczbowych wielkości fizycznych wywołana zmianą podstawowych jednostek miar w danym układzie.

Zmiana wartości podstawowych jednostek miar powoduje zmianę wartości liczbowej danej wielkości fizycznej. Przykładowo, w układzie SI, gdzie jednostką długości jest metr, a czasu sekunda, wartość przyśpieszenia ziemskiego wynosi g=9,81. Jaka będzie ta wartość w układzie, w którym za jednostkę długość uznamy np. cal, zaś za jednostkę czasu np. minutę? Spróbujmy rozwiązać zadanie przeliczania wartości z jednego układu jednostek miar do drugiego w sposób ogólny.

Niech przykładowo wielkość fizyczna A wyraża się w następujący sposób poprzez podstawowe jednostki miar tego układu

$$[A] = L^{p} \cdot T^{r} \cdot M^{s} \tag{1}$$

gdzie L,T i M oznaczają, jak wyżej, uogólnione oznaczenia jednostki, odpowiednio, długości, czasu i masy,

Jeżeli zmienimy (zwiększymy) w danym układzie jednostkę długości n_1 razy, jednostkę czasu n_2 razy, jednostkę masy n_3 razy, to wartość liczbowa danej wielkości, zgodnie z (1) zmieni się 1/k razy, gdzie

$$k = (n_1)^{p} \cdot (n_2)^{r} \cdot (n_3)^{s}$$

Powróćmy do wcześniejszego przykładu. Ponieważ 1 cal=2,54 cm, zaś 1 minuta =60 sekund, to n_1=2,54/100=0,0254 , natomiast n_2=60/1. Dlatego

$$k = 0{,}0254 \cdot (60)^{-2} = 7{,}05555 \cdot 10^{-6}$$

Zatem wartość przyśpieszenia ziemskiego w nowym układzie wynosi 9,81·(1/k)=9,81·141732,28=1390393,6668 cali/minutę, czyli g=1,39 Mcali/min.

3. Analiza wymiarowa jako sposób rozwiązywania zadań

Równania wiążące wielkości fizyczne muszą mieć taką postać, aby wymiary występujące przy odpowiednich podstawowych jednostkach miar po lewej i prawej strony danej równości były takie same. Przykładowo, równanie wyrażające okres drgań τ wahadła matematycznego ma postać:

$$\tau = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{2}$$

gdzie τ jest okresem drgań, l jest długością wahadła, zaś g jest przyśpieszeniem grawitacyjnym. Jak łatwo sprawdzić w równaniu (2), po odpowiednich przekształceniach, po obu stronach równości występuje jedynie czas τ w potędze pierwszej. Równanie (2) przepiszmy w postaci

$$\tau = 2\pi \cdot l^{1/2} \cdot g^{-1/2}$$

które w najogólniejszej formie można zapisać tak:

$$\tau = c \cdot l^{\alpha} \cdot g^{\beta} \tag{3}$$

gdzie c=2·π, α=1/2, β=-1/2.

Analiza wymiarowa opiera się na założeniu, że tak jak w równaniu (3), dana wielkość fizyczna może być przedstawiona jako jednomian potęgowy innych, zależnych wielkości fizycznych. Niejednokrotnie daje się jednoznacznie wyznaczyć wykładniki potęgowe w postulowanej równości typu (3). W jaki sposób działa ta metoda zostanie zademonstrowane na przykładzie wyznaczenia okresu drgań wahadła matematycznego.

Etap I: wypisanie wielkości fizycznych, od których - jak przypuszczamy - może zależeć okres drgań T. Niech będą to: m - masa kulki, l -długość nici, g - przyśpieszenie grawitacyjne.

Dwie pierwsze wielkości zostały wybrane dlatego, że charakteryzują one samo wahadło, natomiast trzecia wielkość charakteryzuje pole grawitacyjne, bez którego nie byłoby drgań. Mamy zatem N=4 wielkości, pomiędzy którymi szukamy związku (τ, m, l, g) oraz K=3 jednostki miar, przez które się one wyrażają (L, T, M).

Etap II: Postulujemy następujący kształt równania wiążącego te cztery wielkości:

$$\tau = c \cdot l^{\alpha} \cdot g^{\beta} \cdot m^{\gamma} \qquad (4)$$

W powyższym równaniu c jest liczbą, której wartości metoda analizy wymiarowej nie potrafi wyznaczyć. Postulujemy, co znajduje uzasadnienie w wielu przykładach, że wartość c zbliżona jest do jedyności.

Równanie (4) zapiszemy dla jednostek miar w następujący sposób:

$$T = L^{\alpha} \cdot \left(L \cdot T^{-2}\right)^{\beta} \cdot M^{\gamma} \qquad (5)$$

Równanie (5) jest równoważne trzem równaniom, zapisanym dla każdej jednostki miary oddzielnie:

$$\begin{aligned} T:&\quad 1 = -2\beta \\ L:&\quad 0 = \alpha + \beta \\ M:&\quad 0 = \gamma \end{aligned} \qquad (6)$$

Zatem równania (6) wynikają z przyrównania wykładników potęgowych przy odpowiednich jednostkach miar.

Rozwiązując (6) otrzymamy:

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad \beta = -\frac{1}{2} \qquad \gamma = 0$$

Ostatecznie równanie (4) będzie miało postać

$$\tau = c \cdot l^{1/2} \cdot g^{-1/2} \cdot m^{0} = c\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (7)$$

Otrzymaliśmy równanie, które poprawnie oddaje funkcyjną zależność okresu drgań od długości wahadła i przyśpieszenia grawitacyjnego.

Zauważmy, że układ równań (6) potrafiliśmy rozwiązać dlatego, że ilość równań była równa ilości niewiadomych. Zatem, gdy ilość rozpatrywanych wielkości przewyższa o jeden ilość wykładników potęgowych (N=K+1), to wartości tych ostatnich będzie można wyznaczyć. Gdyby natomiast N>K+1, wtedy należałoby zrobić dodatkowe założenia dotyczące rozpatrywanego problemu. Ilustruje to poniższy przykład.

W cylindrycznym naczyniu o polu przekroju poprzecznego S1 znajduje się ciecz nielepka o gęstości ρ, wypełniająca naczynie do wysokości h. W dnie naczynia znajduje się otwór o powierzchni S2, przez który ciecz wypływa. Oszacować czas wypływu cieczy z naczynia.

Ponieważ wypływ odbywa się pod wpływem siły ciężkości, dlatego czas wypływu - oprócz wielkości występujących w treści zadania - będzie zależał od przyśpieszenia grawitacyjnego g. Zatem

$$t = c \cdot \rho^{\alpha} \cdot h^{\beta} \cdot g^{\gamma} \cdot S_1^{\delta} \cdot S_2^{\varepsilon} \qquad (8)$$

Równanie to zapisane za pomocą jednostek miar przyjmie postać:

$$T = \left(M \cdot L^{-3}\right)^{\alpha} \cdot L^{\beta} \cdot \left(L \cdot T^{-2}\right)^{\gamma} \cdot \left(L^2\right)^{\delta} \cdot \left(L^2\right)^{\varepsilon}$$

Jest to równoważne następującemu układowi równań

$$T: \quad 1 = -2 \cdot \gamma$$
$$M: \quad 0 = \alpha$$
$$L: \quad 0 = -3 \cdot \alpha + \beta + \gamma + 2 \cdot \delta + 2 \cdot \varepsilon$$

Jak łatwo sprawdzić

$$\alpha = 0 \qquad \gamma = -1/2$$

czyli czas wypływu nie zależy od gęstości. Trzech pozostałych wykładników nie można obliczyć nie czyniąc dodatkowych założeń. Zróbmy więc następujące założenie: prędkość wypływu nie zależy od powierzchni otworu. Oznacz to, że czas wypływu jest odwrotnie proporcjonalny do powierzchni otworu S_2 ($\varepsilon = -1$), oraz że jest on wprost proporcjonalny do ilości cieczy w naczyniu, co dla ustalonego h oznacza, że także do S_1 ($\delta=1$). To założenie umożliwia obliczenie ostatniego wykładnika. Dostajemy, że $\beta=1/2$. Zatem ostatecznie

$$t = c \cdot \sqrt{\frac{h}{g}} \cdot \left(\frac{S_1}{S_2}\right)$$

Inny sposób umożliwiający zwiększenie ilości równań polega na tym, że zwiększa się ilość jednostek miar, dodając jednostki pochodne. Rozpatrzmy poniższy przykład.

W cieczy o gęstości ρ i współczynniku lepkości η wypływa pęcherzyk zapełniony gazem o pomijalnej gęstości i promieniu r. Jaka ustali się prędkość v wypływu tego pęcherzyka?

Ponieważ ruch pęcherzyka odbywa się w polu grawitacyjnym, to oprócz wielkości wymienionych w zadaniu, rozpatrzyć także trzeba zależność prędkości od przyśpieszenia grawitacyjne g. Zatem

$$v = c \cdot r^{\alpha} \cdot g^{\beta} \cdot \rho^{\gamma} \cdot \eta^{\delta} \tag{9}$$

Równanie powyższe przepisane dla podstawowych jednostek miar przyjmie postać

$$L \cdot T^{-1} = (L)^{\alpha} \cdot \left(L \cdot T^{-2}\right)^{\beta} \cdot \left(M \cdot L^{-3}\right)^{\gamma} \cdot \left(M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}\right)^{\delta} \tag{10}$$

Jak łatwo zauważyć mamy cztery niewiadome wykładniki potęgowe i jedynie trzy równania (dla M, T, i L) z których możemy je wyznaczyć.

Spróbujmy zwiększyć ilość równań wprowadzając dodatkową jednostkę miary - siłę. Oznaczmy jednostkę tej miary jako F. Wtedy równanie (10) przybierze postać

$$L \cdot T^{-1} = (L)^{\alpha} \cdot \left(F \cdot M^{-1}\right)^{\beta} \cdot \left(M \cdot L^{-3}\right)^{\gamma} \cdot \left(T \cdot F \cdot L^{-2}\right)^{\delta}$$

Rozpisując je dla poszczególnych jednostek miar dostaniemy

$$\begin{aligned} T: &\quad -1 = \delta \\ M: &\quad 0 = -\beta + \gamma \\ L: &\quad 1 = \alpha - 3 \cdot \gamma - 2 \cdot \delta \\ F: &\quad 0 = \beta + \delta \end{aligned} \tag{11}$$

Rozwiązując układ (11) otrzymamy

$$\alpha = 2 \qquad \beta = 1 \qquad \gamma = 1 \qquad \delta = -1$$

Zatem dla prędkości wypływu pęcherzyka uzyskaliśmy następujące równanie

$$v = \frac{c \cdot g \cdot \rho \cdot r^2}{\eta} .$$

Analizę wymiarową można także stosować w zadaniach dotyczących modelowania zjawisk. Modelowanie to zamiana badania interesującego nas zjawiska występującego w naturze badaniem analogicznego zjawiska na modelu wykonanego w większej lub mniejszej skali.. Rozpatrzymy jako przykład poniższe zadanie.

Śmigłowiec i jego model w skali 1:10 wykonane są z tych samych materiałów. Jaką moc musi mieć silnik zdolny utrzymać w powietrzu śmigłowiec, jeżeli model utrzymywany jest w powietrzu przez silnik o mocy P_m=10 W?

Śmigłowiec utrzymuje się w powietrzu dzięki temu, że odrzuca w dół pewną masę powietrza. Jeżeli w czasie Δt śmigło zakreśli powierzchnię S, nadając powietrzu prędkość v, to uzyska ono pęd Δp równy

$$\Delta p=\Delta m\cdot v=\Delta V\cdot\rho\cdot v=S\cdot v\cdot\Delta t\cdot\rho\cdot v=v^2\cdot S\cdot\rho\cdot\Delta t$$

Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona powietrze nada przeciwnie skierowany pęd śmigłowcu. Zatem siła, z jaką powietrze działa na śmigłowiec jest równa

$$F=(\Delta p/\Delta t)=v^2\cdot S\cdot\rho$$

Aby śmigłowiec utrzymał się w powietrzu, siła ta musi być równa sile grawitacji działającej na niego

$$v^2\cdot S\cdot\rho=M\cdot g$$

gdzie M jest masą śmigłowca. Z powyższego równania możemy wyznaczyć prędkość v strumienia powietrza:

$$v=\sqrt{\frac{M\cdot g}{S\cdot\rho}}$$

Moc silnika śmigłowca obliczymy z równania P=F·v. Dlatego

$$P=v^3\cdot S\cdot\rho=\sqrt{\frac{(M\cdot g)^3}{S\cdot\rho}}$$

Oznaczając indeksem m wielkości dotyczące modelu śmigłowca dostajemy

$$\frac{P}{P_m}=\sqrt{\left(\frac{M}{M_m}\right)^3\cdot\left(\frac{S_m}{S}\right)}=\sqrt{\left(\frac{V}{V_m}\right)^3\cdot\left(\frac{S_m}{S}\right)}$$

Zwiększając n razy rozmiar L powodujemy zwiększenie powierzchni n^2 razy oraz zwiększenie objętości n^3 razy. Dlatego

$$\frac{P}{P_m}=\sqrt{\left(\frac{L}{L_m}\right)^9\cdot\left(\frac{L_m}{L}\right)^2}=\sqrt{n^9\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2}=n^{7/2}$$

W naszym przypadku n=10. Dla wartości podanych w zadaniu

$$P=30\cdot 10^{7/2}=94{,}868\text{ kW.}$$