Janusz Typek

TENSOR
MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

Szczecin, marzec 1994

Temat pracy: Tensor momentu bezwładności

Cel pracy: Obliczenie tensora momentu bezwładności dla układu składającego się z kilku mas punktowych oraz jego wykorzystanie do wyznaczenia momentu bezwładności dla dowolnej osi.

Wymagania programowe: Obliczanie wartości własnych i wektorów własnych macierzy.

Kolejność czynności:

1. Ustalić współrzędne przestrzenne i masy minimum czterech mas punktowych (liczby całkowite w zakresie do kilkunastu). Sporządzić schematyczny rysunek układu tych punktów.

2. Wyznaczyć współrzędne środka masy układu i przetransformować do układu środka masy współrzędne rozpatrywanych mas punktowych. Obliczyć kąty, jakie tworzą wektory wodzące tych mas z osiami układu środka mas.

3. Obliczyć składowe tensora momentu bezwładnosci (rów.(17)).

4. Obliczyć wartości własne i wektory własne tego tensora (rów.(18) i (19)).

5. Sporządzić rysunek przedstawiający położenie osi głównych tensora na tle mas punktowych.

6. Obliczyć długość osi elipsoidy (rów. (26)) będącej geometrycznym przedstawieniem tensora. Naszkicować tą elipsoidę.

7. Obliczyć wartość momentu bezwładności względem dowolnej prostej przechodzącej przez środek masy (rów. (23)).

Tensor momentu bezwładności T_{ij}

Niech $\vec{L}$ będzie wektorem momentu pędu punktu materialnego:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad (1)$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem wodzącym punktu

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z \qquad (2)$$

zaś $\vec{p}$ jest jego pędem:

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad (3).$$

W równaniu (3) *m* oznacza masę punktu, a $\vec{v}$ jego prędkość liniową.

Jeżeli zamiast punktu materianego mamy do czynienia z bryłą sztywną, to

$$\vec{L} = \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \rho \int_V \vec{r} \times \vec{v} \, dV \qquad (4)$$

gdzie ρ jest gęstością jednorodnej bryły.

Załóżmy, że bryła wykonuje ruch obrotowy wokół pewnej osi z prędkością kątową $\vec{\varpi}$. Wiadomo, że wektory $\vec{L}$ i $\vec{\varpi}$ związane są ze sobą następującym równaniem:

$$\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega} \qquad (5)$$

Nie zawsze wektory $\vec{L}$ i $\vec{\varpi}$ leżą na jednej prostej, zatem wielkość $\hat{I}$ nie może być ani skalarem, ani też wektorem. Jest ona tensorem drugiego rzędu (bo łączy dwa wektory) i nazwana została **tensorem momentu bezwładności** .

Tensor momentu bezwładności jest tensorem symetrycznym, który można przedstawić w postaci macierzy 3 na 3:

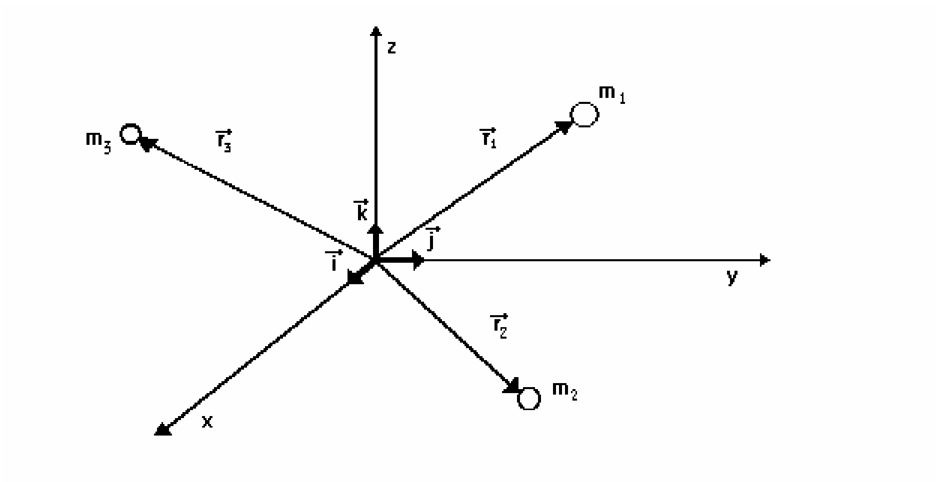
$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Równanie (5) zapisane w postaci macierzowej ma postać:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Niech bryła sztywna będzie złożona z *n* punktów materialnych, każdy o masie m_i, umieszczonych w przestrzeni na końcach wektorów wodzących r_i:

$$\vec{r}_i = \vec{i} \cdot x_i + \vec{j} \cdot y_i + \vec{k} \cdot z_i \tag{8}$$



Ponieważ wektor prędkości liniowej $\vec{v}$ punktu wykonującego ruch obrotowy można przedstawić w postaci

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{9}$$

zatem równanie (4) zapiszemy następująco:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \cdot \left(\vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)\right) \tag{10}$$

Stosując do powyższego równania tożsamość wektorową

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \tag{11}$$

otrzymamy:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \left[\vec{\omega} \cdot r_i^2 - \vec{r}\left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i\right)\right] \tag{12}$$

Ponieważ

$$\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i = \omega_x \cdot x + \omega_y \cdot y + \omega_z \cdot z \tag{13}$$

dlatego równanie (12) przyjmie postać:

$$\vec{i} L_x + \vec{j} L_y + \vec{k} L_z = \sum_i m_i \begin{bmatrix} \vec{i}\omega_x r_i^2 + \vec{j}\omega_y r_i^2 + \vec{k}\omega_z r_i^2 - \vec{i}x\left(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z\right) - \\ \vec{j}y\left(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z\right) - \vec{k}z\left(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z\right) \end{bmatrix} \tag{14}$$

Porównując wyrażenia występujące przy odpowiednich wersorach po obu stronach równania (14) otrzymamy:

$$\begin{aligned}
L_x &= \sum_i m_i \left[\omega_x r_i^2 - x_i\left(\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i\right)\right] = \sum_i m_i \left[\omega_x\left(r_i^2 - x_i^2\right) - \omega_y x_i y_i - \omega_z x_i z_i\right] \\
L_y &= \sum_i m_i \left[\omega_y r_i^2 - y\left(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z\right)\right] = \sum_i m_i \left[-\omega_x x_i y_i + \omega_y\left(r_i^2 - y_i^2\right) - \omega_z y_i z_i\right] \\
L_z &= \sum_i m_i \left[\omega_z r_i^2 - z\left(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z\right)\right] = \sum_i m_i \left[-z_i x_i \omega_x - \omega_y z_i y_i + \omega_z\left(r_i^2 - z_i^2\right)\right]
\end{aligned} \tag{15}$$

Rozpisując równanie (7) dostaniemy:

$$\begin{aligned}
L_x &= I_{xx}\,\omega_x + I_{xy}\,\omega_y + I_{xz}\,\omega_z \\
L_y &= I_{yx}\,\omega_x + I_{yy}\,\omega_y + I_{yz}\,\omega_z \\
L_z &= I_{zx}\,\omega_x + I_{zy}\,\omega_y + I_{zz}\,\omega_z
\end{aligned} \tag{16}$$

Porównanie stronami równań (15) i (16) pozwala otrzymać ostateczne wyrażenie na składowe tensora momentu bezwładności:

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \sum_i m_i\left(r_i^2 - x_i^2\right) = \sum_i m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right) \\
I_{yy} &= \sum_i m_i\left(x_i^2 + z_i^2\right) \\
I_{zz} &= \sum_i m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) \\
I_{xy} &= \sum_i\left(-m_i x_i y_i\right) = -\sum_i m_i x_i y_i \\
I_{xz} &= -\sum_i m_i x_i z_i \\
I_{yz} &= -\sum_i m_i y_i z_i
\end{aligned} \tag{17}$$

Powyższe równania można zapisać w zwięzłej postaci stosując tzw. symbol Kroneckera δ_{kl}:

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 \ldots \text{gdy} \ldots k = l \\ 0 \ldots \text{gdy} \ldots k \neq l \end{cases}$$

Wtedy wszystkie równania (17) zapiszą się tak:

$$\boxed{I_{kl} = \sum_i m_i \left(r_{kl}^2\, \delta_{kl} - x_k x_l\right)_i}$$

W powyższym równaniu $x_1=x;\ x_2=y;\ x_3=z.$

Wartości własne i wektory własne tensora

Równanie na wartości własne λ tensora T_{ij} ma postać:

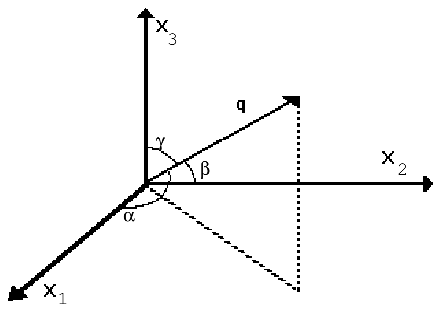
$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (18)$$

Rozwiązując to równanie trzeciego stopnia otrzymujemy trzy (w ogólności różne) wartości własne λ_1, λ_2, λ_3. W przypadku tensora momentu bezwładności są to **główne momenty bezwładności** względem trzech wzajemnie prostopadłych osi zwanych osiami głównymi. **Osie główne** czyli wektory własne tensora $\mathbf{w_i}$ obliczymy z równania:

$$\begin{pmatrix} T_{11}-\lambda_i & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda_i & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_{i1} \\ w_{i2} \\ w_{i3} \end{pmatrix} = 0 \qquad (19)$$

dla i=1,2,3.

Geometryczna interpretacja tensora



Niech wektor $\vec{q}$ tworzy z osiami układu $Ox_1x_2x_3$ kąty α, β i γ. Jego składowe są zatem $\vec{q}(q\cdot\cos(\alpha), q\cdot\cos(\beta), q\cdot\cos(\gamma))$ .Można je symbolicznie zapisać jako $q{\cdot}c_k$, gdzie c_k jest odpowiednim cosinusem kierunkowym. Załóżmy ponadto, że wektor $\vec{p}$ powstaje skutkiem działania tensora T_{ik} na wektor $\vec{q}$. Wtedy

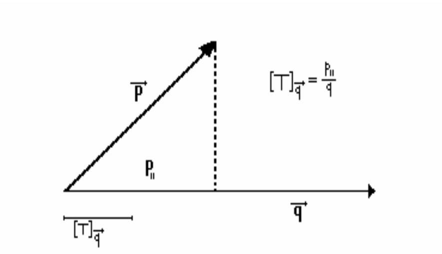
$$p_i = \sum_k T_{ik}\cdot q \cdot c_k \equiv T_{ik}\cdot q \cdot c_k = q\ T_{ik}\cdot c_k \qquad (20)$$

gdzie zastosowano umowę sumacyjną Einsteina: jeżeli w wyrażeniu dany wskaźnik występuje dwa razy (tutaj *k*), to należy wykonać po nim sumowanie.

Przyjmijmy następującą definicję:

Jeżeli wielkość fizyczna jest określona funkcją $p_i=T_{ik}q_k$, to tensor $[T_{ik}]$ ma w obranym kierunku $\bar{q}$ wartość równą składowej $p_\parallel$ równoległej do $\bar{q}$ podzielonej przez bezwzględną wartość q:

$$[T]_{\bar{q}} = \frac{p_\parallel}{q} \tag{21}$$



Składowa $p_\parallel$ jest równa iloczynowi skalarnemu wektora $\bar{p}$ oraz wektora jednostkowego w kierunku wektora $\bar{q}$ a ma on składowe (c_1, c_2, c_3). Dlatego

$$p_\parallel = c_i \cdot p_i = q \cdot c_i \cdot T_{ik} \cdot c_k$$

Zgodnie z definicją (21) otrzymamy:

$$[T]_{c_1c_2c_3} = \frac{p_\parallel}{q} = c_i \cdot T_{ik} \cdot c_k \tag{22}$$

Z powyższego wzoru wynika, że tensor T ma w kierunku osi x_1(czyli dla c_1=1, c_2=c_3=0 wartość T_{11}, w kierunku osi x_3 wartość T_{33} itp.). Równanie (22) w pełnej postaci wygląda następująco:

$$[T]_{c_1c_2c_3} = T_{11}c_1^2 + T_{22}c_2^2 + T_{33}c_3^2 + 2\,T_{12}c_1c_2 + 2\,T_{23}c_2c_3 + 2\,T_{31}c_3c_1 \tag{23}$$

Tensor w układzie osi głównych ma zatem jedynie 3 składowe: T_{11},T_{22},T_{33}.

Rozpatrzmy następnie równanie powierzchni drugiego stopnia:

$$T_{11}x_1^2 + T_{22}x_2^2 + T_{33}x_3^2 + 2\,T_{12}x_1x_2 + 2\,T_{23}x_2x_3 + 2\,T_{31}x_3x_1 = 1 \tag{24}$$

Niech punkt P leży na tej powierzchni, w odległości r=*OP* od początku okładu odniesienia i niech cosinusy kierunkowe wektora jednostkowego prostej *OP* wynoszą odpowiednio c_i. Zatem $x_i = r \cdot c_i$. Podstawiając te wartości do równania (24) dostaniemy:

$$r^2 \left[T_{11} c_1^2 + T_{22} c_2^2 + T_{33} c_3^2 + 2\ T_{12} c_1 c_2 + 2\ T_{23} c_2 c_3 + 2\ T_{31} c_3 c_1 \right] = 1 \qquad (25)$$

Uwzględniając (23), wzór (25) można zapisać tak:

$$r^2 [T]_{c_1 c_2 c_3} = 1 \quad \text{czyli} \quad [T]_{c_1 c_2 c_3} = \frac{1}{r^2} \qquad (26)$$

To ostatnie równanie można zapisać w bardziej zwięzłej postaci

$$x_i T_{ik} x_k = 1 \qquad (27)$$

Nazywamy je **kwadryką** tensora T_{ik}.

Jeżeli własność fizyczna ma stale wartość dodatnią, jak to ma miejsce np. dla momentu bezwładności, to kwadrykę tensora T_{ik} stanowi elipsoida. Promień wodzący *r* wyprowadzony ze środka kwadryki do dowolnego punktu na powierzchni jest równy odwrotności pierwiastka kwadratowego własności reprezentowanej przez kwadrykę i mierzonej w kierunku promienia wodzącego *r*:

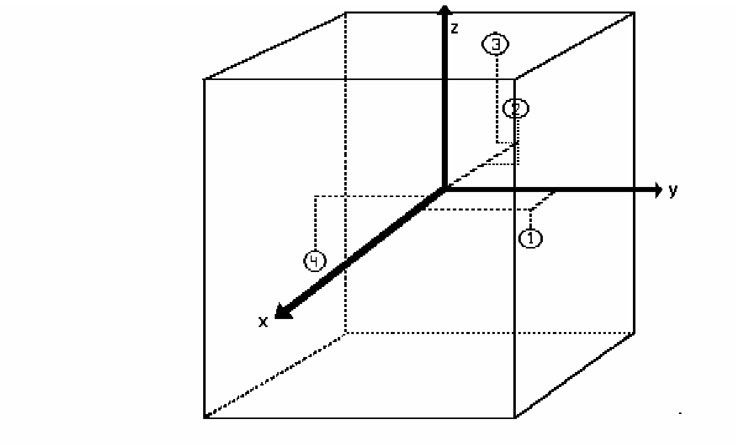
$$r = \frac{1}{\sqrt{[T]_r}} \qquad (28)$$

PRZYKŁAD

1. Współrzędne punktów (układ OXYZ) oraz ich masy:

Zakładam, że badanym układem będzie zbiór czterech mas punktowych o następujących współrzędnych przestrzennych podanych w układzie OXYZ (patrz rysunek 1) oraz o masach m_i:

Punkt	X_i	Y_i	Z_i	m_i
P1	4	7	-1	8
P2	-3	2	4	4
P3	-7	-1	8	3
P4	1	-7	-2	7



2. Wyznaczenie współrzędnych (x_S,y_S,z_S) środka masy układu:

$$x_s = \frac{\sum_i m_i \cdot X_i}{\sum_i m_i} \qquad y_s = \frac{\sum_i m_i \cdot Y_i}{\sum_i m_i} \qquad z_s = \frac{\sum_i m_i \cdot Z_i}{\sum_i m_i}$$

Dla układu punktów P1...P4 obliczone współrzędne środka masy wynoszą:

x_S=0.272727 y_S=0.545454 z_S=0.818181

3. Obliczenie współrzędnych punktów w układzie środka masy (układ Oxyz)

$x=X-x_S$ $y=Y-y_S$ $z=Z-z_S$

Punkt	x_i	y_i	z_i
P1	3.727272	6.454545	-1.818181
P2	-3.272727	1.454545	3.181818
P3	-7.272727	-1.545454	7.181818
P4	0.727272	-7.545454	-2.818181

Kąty (w stopniach), jakie tworzą wektory wodzące tych punktów z osiami układu współrzędnych Oxyz wynoszą:

Punkt	Ox	Oy	Oz
P1	60,9	32,7	103,7
P2	133,1	72,3	48,4
P3	134,7	98,6	46,0
P4	84,8	158,9	110,4

Obliczone one zostały z równania:

$$\cos(\alpha_{ik}) = \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{n}_k}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}} = \frac{x_i \cdot n_{kx} + y_i \cdot n_{ky} + z_i \cdot n_{kz}}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}}$$

gdzie $\vec{r}_i$ jest wektorem wodzącym wybranego punktu, a $\vec{n}$ wersorem (wektorem jednostkowym) odpowiedniej osi układu współrzędnych. Np. wersor osi Oy to wektor (0, 1, 0).

4. Obliczenie składowych tensora momentu bezwładności I_{ij}:

Obliczenia wykonujemy w oparciu o wzory (17). Otrzymano następujące wyniki:

I_{xx}=1024.727 I_{yy}=593.6363 I_{zz}=1063.818

I_{xy}=-168.7273 I_{xz}=266.9091 I_{yz}=-40.18182

Ponieważ tensor zawiera elementy pozadiagonalne, przyjęty układ odniesienia *Oxyz* nie jest układem osi głównych tensora momentu bezwładności.

5. Obliczenie wartości własnych i wektorów własnych tensora momentu bezwładności.

Wartości własne obliczymy rozwiązując następujące równanie trzeciego stopnia względem I (równanie (18)):

$$\begin{vmatrix} 1024.727 - I & -168.7273 & 266.9091 \\ -168.7273 & 593.6363 - I & -40.18182 \\ 266.9091 & -40.18182 & 1063.818 - I \end{vmatrix} = 0$$

Otrzymuje się następujące wartości liczbowe dla głównych momentów bezwładności:

I_1=1340.41 I_2=812.23 I_3=529.544

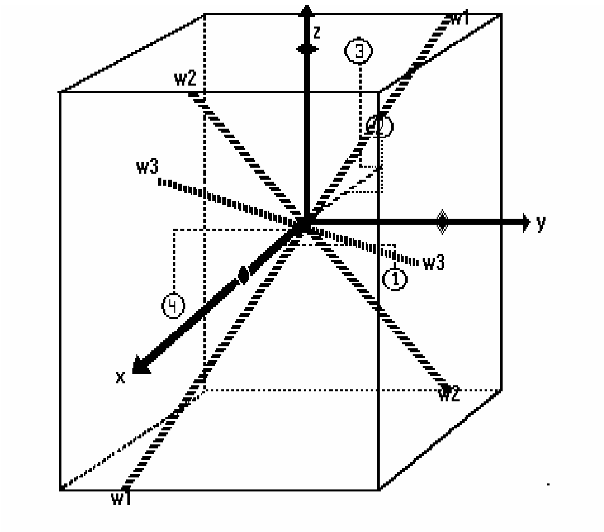
Trzy wektory własne $\vec{w}_i$ (osie główne), odpowiadające poszczególnym wartościom własnym obliczymy z następujących trzech równań (dla *i*=1,2,3) :

$$\begin{pmatrix} 1024{,}727 - I_i & -168.7273 & 266.9091 \\ -168.7273 & 593.6363 - I_i & -40.18182 \\ 266.9091 & -40.18182 & 1063.818 - I_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = 0$$

Otrzymano poniższe wartości liczbowe na składowe wektorów własnych:

$$w_1 = \begin{pmatrix} -0.683918 \\ 0.191535 \\ -0.687807 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0.512682 \\ -0.287311 \\ -0.58979 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0.45832 \\ 1.11561 \\ -0.145061 \end{pmatrix}$$

Punkty P1...P4 tworzą następujące kąty (w stopniach) z osiami układu osi głównych $Ow_1w_2w_3$:



Punkt	Ow_1	Ow_2	Ow_3
P1	90.5	79.8	10.2
P2	86.0	174.8	93.3
P3	91.5	150.9	119.1
P4	90.0	51.4	141.4

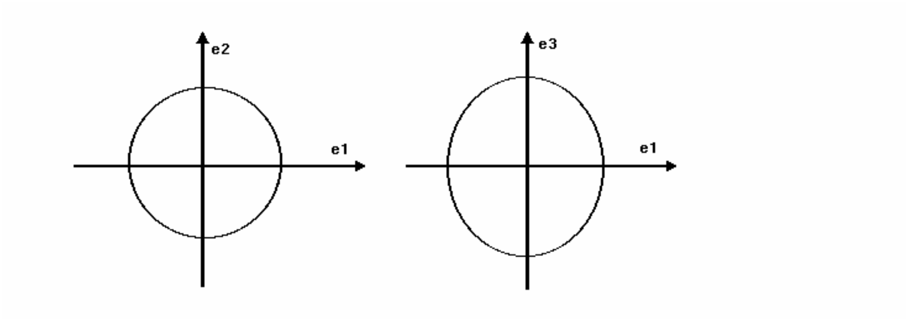
Obliczone zostały one z równania

$$\cos(\delta_{ik}) = \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{w}_k}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \cdot \sqrt{w_{kx}^2 + w_{ky}^2 + w_{kz}^2}} = \frac{x_i \cdot w_{kx} + y_i \cdot w_{ky} + z_i \cdot w_{kz}}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \cdot \sqrt{w_{kx}^2 + w_{ky}^2 + w_{kz}^2}}$$

6. Kwadryka tensora momentu bezwładności:

Osie elipsoidy, będącej geometrycznym przedstawieniem tensora momentu bezwładności mają następujące długości (równanie (28)):

$$e1 = \frac{1}{\sqrt{I_1}} = 0{,}027314 \quad e2 = \frac{1}{\sqrt{I_2}} = 0{,}035088 \quad e3 = \frac{1}{\sqrt{I_3}} = 0{,}043456$$



7. Obliczenie momentu bezwładności względem dowolnie wybranej osi.

Rozpatrzmy dowolną prostą, której wektor jednostkowy w układzie środka masy Oxyz ma następujące cosinusy kierunkowe:(0,45; 0,30; -0,84113). (Suma kwadratów musi być równa jeden). Ta prosta tworzy następujące kąty z osiami głównymi (w stopniach):

α=70.6 β=39,7 γ=56,9

Moment bezwładności względem tej osi wynosi (równanie (23)):

$$I = (0{,}45)^2 \cdot 1340{,}41 + (0{,}30)^2 \cdot 812{,}23 + (-0{,}84113)^2 \cdot 529{,}544 = 719{,}186$$