## Zadania z analizy wymiarowej

*2.1. Zmiana wartości wielkości fizycznych wywołana zmianą jednostek miar*

2.1.1. Obliczyć wartość stałej grawitacji G w takim układzie jednostek miar , w którym jednostką masy jest masa Słońca ($M_s$= $1,9889 \cdot 10^{30}$ kg), jednostką odległości jest parsek (1 ps= $3,08567756 \cdot 10^{16}$ m), zaś jednostką czasu jest jeden rok (1 rok = 31556925,97 s).

2.1.2. Wartość ciepła właściwego miedzi, równą 0,038 J/(kg·K) w układzie SI, przetransformować do układu, w którym jednostką energii jest elektronowolt, a jednostką masy jest atomowa jednostka masy.

2.1.3. Atmosfera fizyczna, pozaukładową jednostka ciśnienia, zdefiniowana jest jako takie ciśnienie, które równoważne jest ciśnieniu słupa rtęci o gęstości 13,595 g/cm$^3$ i o wysokości 76 cm, w polu grawitacyjnym g=980,665 cm/s$^2$. Ilu paskalom odpowiada jedna atmosfera?

2.1.4. Jaka jest równowartość w układzie SI nadal używanej pozaukładowej jednostki mocy 1 kcal/godzinę? Przyjąć, że 1 cal=4,1868 J.

2.1.5. W układzie SI jednostką modułu Younga jest paskal. Wartość modułu Younga dla miedzi wynosi $12 \cdot 10^{10}$ Pa. Jaka będzie ta wartość wyrażona w pozaukładowych jednostkach kgs/mm$^2$?. Wskazówka: 1 kgs=9,81 N.

2.1.6. Obliczyć, jaki będzie przelicznik pozwalający zamieniać jednostkę współczynnika przewodnictwa cieplnego w układzie SI w pozaukładową jednostkę kcal/(godzina·m$^2$·K).

2.1.7. Jaki jest związek pomiędzy jednostką natężenia głosu w układzie SI a pozaukładową jednostka erg/(cm$^2$·s)?

2.1.8. Ile razy zmieniłaby się wartość liczbowa oporu elektrycznego pewnego metalu, gdyby jednostkę długości zwiększyć 10 razy, jednostkę masy zmniejszyć 1000 razy, jednostkę czasu zwiększyć 3600 razy, a jednostkę natężenia prądu zmniejszyć 100 razy?

2.1.9. Jednostka spektralnej gęstości strumienia energii przypadająca na jednostkową długości fali wyraża się w układzie SI w W/m, zaś w układzie CGS w ergach/(s·cm). Jaki jest współczynnik przeliczeniowy pomiędzy tymi układami ?

2.1.10. Wartość stałej Stefana-Boltzmanna w układzie SI wynosi $5,67 \cdot 10^{-8}$ W/(m$^2$·K$^4$). Jaka jest wartość tej stałej, wyrażonej w erg/(s·cm$^2$·K$^4$) ?

*2.2 Rozwiązywanie zadań za pomocą analizy wymiarowej*

*2.2.1. Dynamika*

2.2.1.1. Satelita porusza się swobodnie wokół pewnej planety, w pobliżu jej powierzchni. Oszacować jego prędkość orbitalną oraz okres obiegu planety. Obliczenia wykonać dla Ziemi.

2.2.1.2. Oszacować przyśpieszenie grawitacyjne na powierzchni zadanej planety lub gwiazdy. Obliczenia wykonać dla Ziemi i Słońca.

2.2.1.3. Oszacować czas swobodnego spadku ciała z pewnej wysokości na zadanej planecie. Obliczenia wykonać dla Ziemi.

2.2.1.4. Oszacować czas swobodnego przelotu kamienia przez tunel przewiercony wzdłuż średnicy Ziemi.

2.2.1.5. Oszacować ciśnienie panujące we wnętrzu ciała o dużych rozmiarach. Obliczenia wykonać dla Ziemi i Słońca.

2.2.1.6. Otrzymać wyrażenie na siłę przyciągania grawitacyjnego dwu mas punktowych oddalonych od siebie, zakładając, że wykładniki potęgowe przy obu masach mają taką samą wartość.

2.2.1.7. Otrzymać wyrażenie na siłę przyciągania elektrycznego dwu ładunków punktowych oddalonych od siebie, zakładając, że wykładniki potęgowe przy obu ładunkach mają taką samą wartość.

2.2.1.8. Otrzymać wyrażenie na energię kinetyczną cząstki swobodnej o masie m i prędkości v.

2.2.1.9. W gazowym ośrodku o gęstości $\rho$ porusza się ze stałą prędkością ciało o poprzecznym rozmiarze R. Oszacować siłę oporu działającą na to ciało. Obliczenia wykonać dla poruszającego się samochodu.

2.2.1.10. Siła Coriolisa działa na ciała poruszające się z pewną prędkością w układzie odniesienia, który sam się obraca z zadaną prędkością kątową. Otrzymać wyrażenie na wartość tej siły. Wykonać obliczenia dla samolotu poruszającego się nad równikiem ziemskim.

2.2.1.11. Ciało o pewnej masie, zaczepione na końcu nici o zadanej długości, wiruje dookoła ustalonej osi. Otrzymać wyrażenie na siłę naciągu nici.

2.2.1.12. Na ciało o pewnej masie działa na ustalonej drodze stała siła. Jaka będzie prędkość i energia kinetyczna tego ciała na końcu tej drogi ?

2.2.1.13. Promień światła przebiegając w pobliżu dużej masy na skutek oddziaływania grawitacyjnego zmienia nieco swój kierunek o kąt $\alpha$. Zakładając, że ugięcie to jest proporcjonalne do stałej grawitacji, otrzymać wyrażenie na jego wielkość. Obliczenia wykonać dla promienia przebiegającego w pobliżu powierzchni Słońca.

2.2.1.14. Czarna dziura jest obiektem, który powstaje w rezultacie grawitacyjnego zapadania się gwiazdy lub galaktyki. Promień czarnej dziury określa się jako odległość od jej centrum, gdzie prędkość ucieczki jest równa prędkości światła. Otrzymać wyrażenie na promień grawitacyjny danego obiektu. Oszacować go dla Ziemi i dla Słońca.

2.2.1.15. W rurze o średnicy D płynie ciecz o współczynniku lepkości $\eta$. Ruch cieczy wywołany jest zadanym gradientem ciśnienia wzdłuż długości rury dp/dl. Otrzymać wyrażenie na objętość cieczy Q, przepływającą przez tą rurę w jednostce czasu. Wskazówka: Jako niezależne przyjąć jednostki długości, czasu i lepkości.

2.2.1.16. Bezwymiarowa wielkość zwana stałą Reynoldsa R występuje wtedy, gdy rozważamy ruch ciała o rozmiarze l, poruszającego się z prędkością v w cieczy o gęstości $\rho$ i współczynniku lepkości $\mu$. Otrzymać wyrażenie na tą stałą R.

2.2.1.17. Bezwymiarowy parametr hydrodynamiczny, zwany liczbą Strouhala, służy - między innymi - do opisu efektywności pływania ryb. Ryby machają ogonami na boki w celu wytworzenia wirów, które wywołują strumień o dużej efektywności napędowej. Wyprowadzić wyrażenie na liczbę Strouhala wiedząc, że zależy ona od częstotliwości uderzeń ogona ryby, szerokości strumienia wytworzonych wirów i prędkości ryby.
Uwaga: Prędkość ryby występuje w mianowniku. Pływanie jest najefektywniejsze, gdy liczba Strouhala przyjmuje wartości w zakresie od 0,25 do 0,35.

2.2.1.18. Piłka o masie m, promieniu r i nadwyżce ciśnienia $\Delta p$ nad ciśnieniem zewnętrznym zderza się z betonową ścianą. Oszacować czas tego zderzenia. Przyjąć m=400 g, r=10 cm, $\Delta p$=1 atm.

2.2.1.19. Rozważmy planetę składającą się z materiału mającego gęstości $\rho$ i granicę wytrzymałości na siły ścinające $\sigma_m$ .Otrzymać wzór na minimalną wartość promienia $R_m$ i masy $M_m$ planety, której kształt będzie kulisty. Obliczenia wykonać dla planet złożonych z lodu ($\rho$=1 g/cm$^3$, $\sigma_m$=3 MPa), z granitu ($\rho$=2,7 g/cm$^3$, $\sigma_m$=100 MPa) i z żelaza ($\rho$=7,8 g/cm$^3$, $\sigma_m$=1 GPa).

2.2.1.20. Mały meteoryt uderza w powierzchnię planety, tworząc krater o promieniu R. Zakładając, że cała energia kinetyczna meteorytu $E_k$ zostaje zużyta na rozdrobnienie materiału planety (mającego gęstość $\rho$ i granicę wytrzymałości na ścinanie $\sigma_m$) z objętości krateru, znaleźć związek pomiędzy tymi wielkościami.

2.2.1.21. Niewielki meteoryt o masie m uderza z prędkością v w powierzchnię planety, zbudowanej z materiału o gęstości $\rho$ i granicy wytrzymałości na ścinanie $\sigma_m$. W rezultacie zderzenia tworzy się krater. Otrzymać wyrażenie na promień R tego krateru. Obliczenia wykonać dla meteorytu o masie m=1000 kg spadającego z drugą prędkością kosmiczną v=11,2 km/s na skały osadowe ($\sigma_m$=10 MPa).

2.2.1.22. Jakiej energii trzeba użyć, aby na powierzchni planety o gęstości $\rho$, gdzie przyśpieszenie grawitacyjne jest równe g, wykopać dół o rozmiarze R?

2.2.1.23. W wyniku uderzenia dużego meteorytu w powierzchnię planety powstaje krater o promieniu R. Zakładając, że energia kinetyczna meteorytu zostaje zużyta głównie na wyrzucenie skał z objętości krateru, otrzymać związek pomiędzy energią kinetyczną meteorytu $E_k$ a promieniem krateru R. Obliczenia wykonać dla meteorytu o masie m=50 mln kg spadającego z drugą prędkością kosmiczną v=11,2 km/s na skały granitowe ($\rho$=2,7 g/cm$^3$) na Ziemi.

2.2.1.24. Wiatrak o średnicy skrzydeł D znajduje się w strumieniu powietrza o gęstości $\rho$, mającego prędkość v względem niego. Otrzymać wyrażenie na maksymalną moc energii, która otrzymać można z tego wiatraka.

### *2.2.2. Drgania i fale*

2.2.2.1. Otrzymać wyrażenie na okres drgań prostego wahadła matematycznego.

2.2.2.2. Otrzymać wyrażenie na okres drgań kuleczki zawieszonej na sprężynie.

2.2.2.3. W gazie o gęstości $\rho$ wybuchł pocisk, wyzwalając energię *E*. Otrzymać czasową zależność *r(t)* rozchodzenia się czoła powstałej fali uderzeniowej.

2.2.2.4. W ośrodku sprężystym o gęstości $\rho$ i o module Younga *E* rozchodzą się fale podłużne. Otrzymać wyrażenie na ich prędkość. Obliczenia wykonać dla żelaza.

2.2.2.5. W konkretnym gazie rozchodzą się fale dźwiękowe. Otrzymać wzór wyrażający temperaturową zależność ich prędkości. Obliczyć prędkość fal dźwiękowych dla powietrza w temperaturze pokojowej.

2.2.2.6. Sznur zaczepiony jest jednym końcem na stałe do ściany, zaś drugi jego swobodny koniec naciągany jest siłą N. Poruszając swobodnym końcem w kierunku pionowym wzbudzamy w sznurze fale biegnące. Oszacować ich prędkość.

2.2.2.7. Kropelka cieczy o napięciu powierzchniowym $\sigma$ została początkowo nieznacznie odkształcona od swojej formy sferycznej, a następnie pozostawiona swobodnie. W rezultacie odkształcenia zaczęły się drgania jej kształtu. Oszacować ich okres.

2.2.2.8. Cefeidy to gwiazdy, które pulsują, zmieniając okresowo swoją jasność i rozmiary. Otrzymać równanie na okres tych drgań, zakładając że jest on funkcją masy gwiazdy, jej średniego promienia i stałej grawitacyjnej. Obliczenia wykonać dla gwiazdy takiej jak Słońce.

2.2.2.9. Na powierzchni wody rozchodzą się krótkie fale kapilarne, czyli takie, w których decydującą rolę odgrywa siła napięcia powierzchniowego wody. Otrzymać zależność ich prędkości od długości fali. Obliczenia wykonać dla fal o długości $\lambda$=1 mm.

2.2.2.10. Na powierzchni wody rozchodzą się długie fale grawitacyjne, czyli takie, w których decydującą rolę odgrywa siła grawitacyjna. Otrzymać zależność ich prędkości od długości fali. Obliczenia wykonać dla fal o długości $\lambda$=1 m.

2.2.2.11. Próżnia charakteryzuje się przenikalnością elektryczną $\varepsilon_0$ i przenikalnością magnetyczną $\mu_0$ . Otrzymać równanie na prędkość fali elektromagnetycznej w próżni.

### *2.2.3. Termodynamika*

2.2.3.1. Stan gazu doskonałego opisany jest przez trzy parametry: ciśnienie, objętość i temperaturę. Otrzymać zależność pomiędzy tymi parametrami.

2.2.3.2. Otrzymać wyrażenie na prędkość ruch cząstki gazu, którego temperatura jest równa T. Obliczenia wykonać dla molekuły azotu w powietrzu o temperaturze pokojowej.

2.2.3.3. Oszacować minimalny promień planety $R_{min}$, która potrafi utrzymać atmosferę złożoną z gazu o masie cząsteczkowej $\mu$. Średnia gęstość planety wynosi $\rho$, zaś temperatura na jej powierzchni $T_p$. Obliczenia wykonać dla Ziemi.

2.2.3.4. Ściana o powierzchni S i grubości h, wykonana z materiału o współczynniku przewodnictwa cieplnego k, oddziela dwa pomieszczenia, różniące się temperaturą $\Delta T$. Otrzymać wyrażenie na moc strumienia ciepła płynącego przez tą ścianę.

### *2.2.4. Elektromagnetyzm*

2.2.4.1.Wyrazić poprzez podstawowe jednostki miar przenikalność elektryczną próżni $\varepsilon_0$, występującą w prawie Coulomba.

2.2.4.2. Wyrazić poprzez podstawowe jednostki miar przenikalność magnetyczną próżni $\mu_0$, występującą w równaniu otrzymanym w zadaniu 2.11.

2.2.4.3. Oszacować energię zawartą w kondensatorze o zadanej pojemności, do którego przyłożono konkretne napięcie.

2.2.4.4. Oszacować gęstość objętościową energii [energia/objętość] w miejscu, w którym istnieje pole elektryczne o natężeniu E.

2.2.4.5. Oszacować gęstość objętościową energii [energia/objętość] w miejscu, w którym istnieje pole magnetyczne o indukcji B.

2.2.4.6. Otrzymać wyrażenie na indukcję pola magnetycznego B wytworzonego w odległości x od przewodnika w którym płynie prąd o natężeniu I.

2.2.4.7. Cząstka o pewnym ładunku elektrycznym krąży po orbicie kołowej ze stałą prędkością w stałym polu magnetycznym. Oszacować promień orbity jej toru. Obliczenia wykonać dla elektronu w polu $B=10^{-4}$ T, mającego prędkość $v=10^3$ m/s.

` 2.2.4.8. Do opornika o oporze R przyłożono napięcie U, w wyniku czego płynie w nim prąd o natężeniu I. Jaki jest związek pomiędzy tymi wielkościami?

` 2.2.4.9. Jaki potencjał elektryczny istnieje w punkcie oddalonym o x od ładunku punktowego q?

2.2.4.10. Dwa nieskończone, prostoliniowe druty naładowane są ze stałą gęstością liniową $\lambda$ ładunkiem elektrycznym. Druty są ułożone prostopadle do siebie i najmniejsza odległość pomiędzy nimi wynosi x. Jaka jest wartość siły działającej pomiędzy nimi?

2.2.4.11. Punktowy ładunek elektryczny znajduje się w pewnej odległości od dużej metalowej płyty. Oszacować wielkość siły oddziaływania tego ładunku z płytą.

### *2.2.5. Fizyka mikroświata*

2.2.5.1. Prawo przesunięć Wiena wiąże temperaturę ciała doskonale czarnego T z długością fali $\lambda_{max}$, na której ciało promieniuje najintensywniej: $\lambda_{max} \cdot T=b$, gdzie b jest stałą Wiena. Obliczyć wartość tej stałej, jeżeli wiadomo, że jest ona funkcją stałych fundamentalnych h, c i k, oraz że współczynnik liczbowy jest równy 1/5.

2.2.5.2. Prawo Stefana-Boltzmanna wiąże temperaturę ciała doskonale czarnego T z całkowitą mocą W emitowanego promieniowania z jednostki jego powierzchni i ma postać

$$W = \sigma \cdot T^4$$

gdzie $\sigma$ jest stałą Stefana-Boltzmanna. Obliczyć wartość tej stałej, jeżeli wiadomo, że jest ona funkcją stałych fundamentalnych $\hbar$, c i k, oraz że współczynnik liczbowy jest równy 0,1645.

2.2.5.3. Elektron krąży po orbicie wokół jądra atomowego, przyciągany siłą elektryczną. Zakładając, że ruch elektronu jest kwantowy i nierelatywistyczny, otrzymać wyrażenie na promień jego orbity oraz wyrażenie na jego całkowitą energię. Obliczyć promień orbity oraz energię dla atomu wodoru.

2.2.5.4. Molekuła liniowa o masie m i długości l obraca się wokół swojej osi symetrii. Otrzymać wyrażenie na energię tego ruchu, zakładając, że jest on kwantowy i nierelatywistyczny. Obliczyć tą energię dla molekuły $N_2$.

2.2.5.5. Otrzymać wyrażenie na energię fotonu, którego długość fali $\lambda$ jest znana. Foton jest cząstką kwantową i relatywistyczną. Obliczenia liczbowe wykonać dla fotonu o $\lambda$=500 nm.

## 2.3. *Naturalne układy jednostek miar*

2.3.1. Z fundamentalnych stałych fizycznych:

c - prędkość światła, $\hbar$ - stała Planck'a, G - stała grawitacji

metodą analizy wymiarowej utworzyć wielkości fizyczne o wymiarze długości, czasu i masy. Obliczyć wartość tych wielkości.

2.3.2. Z fundamentalnych stałych fizycznych:

c - prędkość światła, $\hbar$ - stała Planck'a, $m_e$ - masa elektronu

metodą analizy wymiarowej utworzyć wielkości fizyczne o wymiarze długości, czasu i masy. Obliczyć wartość tych wielkości.

2.3.3. Z fundamentalnych stałych fizycznych:

$m_e$ - masa elektronu, $\hbar$ - stała Planck'a, $q_e$ - ładunek elektronu

oraz ze stałej elektrycznej $\varepsilon_0$, metodą analizy wymiarowej utworzyć wielkości fizyczne o wymiarze długości, czasu i energii. Obliczyć wartość tych wielkości.