7. Fale

7.1. Równania falowe, dyspersja fal

1. Płaska fala monochromatyczna, rozchodząca w pewnym ośrodku wzdłuż osi x opisana jest równaniem: $\psi(x, t)=3{,}2\cdot\sin(200\cdot t+0{,}4\cdot x)$, gdzie amplituda przesunięcia wyrażona jest w μm, czas w sekundach, natomiast x w metrach. Obliczyć:

   a) częstotliwość ν, okres T, długość fali λ i prędkość fali v;

   b) amplitudę przesunięcia, prędkości i przyśpieszenia cząstek ośrodka;

   c) różnicę faz między punktami x_1=2 m i x_2=3 m .

2. Płaska fala harmoniczna o częstotliwości ν=250 Hz rozchodzi się w pewnym ośrodku z prędkością v=500 m/s. Jaka jest różnica faz drgań dwu cząstek ośrodka odległych od siebie o Δx=1,5 m?

3. Płaska fala harmoniczna o częstotliwości ν=2250 Hz rozchodzi się z prędkością v=900 m/s wzdłuż prostej leżącej w płaszczyźnie xy i tworzącej z osią x kąt α=60°. Jaka jest różnica faz drgań dwu cząstek ośrodka P1 i P2 znajdujących się w punktach o następujących współrzędnych: P1(–2, 4, 12), P2(3, –12, –1).

4. Płaska fala monochromatyczna, rozchodząca w pewnym ośrodku wzdłuż osi x opisana jest równaniem: $\psi(x,t)=4\cdot\sin(300\cdot t-0{,}4\cdot x)$, gdzie amplituda przesunięcia wyrażona jest w μm, czas w sekundach, natomiast x w metrach. Jaka jest względna deformacja tego ośrodka w punktach, gdzie:

   a) prędkość cząstek ośrodka jest maksymalna;

   b) wychylenie cząstek ośrodka z położenia równowagi jest maksymalne;

   c) przyśpieszenie cząstek ośrodka jest równe połowie maksymalnego.

5. Płaska fala harmoniczna o długości λ=2 m i amplitudzie przesunięcia a=2 mm rozchodzi się z prędkością v=300 m/s. Jaka jest prędkość cząstki ośrodka znajdującej się w odległości x=35 m od źródła fali w chwili t=15 s ?

6. W jednorodnym ośrodku rozchodzą się dwie fale podłużne: jedna wzdłuż osi x, druga wzdłuż osi y: $\psi_1(x,t)=a\cdot\sin(\omega\cdot t-k\cdot x)$, $\psi_2(y,t)=a\cdot\cos(\omega\cdot t-k\cdot y)$. Opisać charakter ruchu cząstek ośrodka w płaszczyźnie xy.

7. Płaska fala tłumiona, rozchodząca w pewnym ośrodku wzdłuż osi x opisana jest następującym równaniem: $\psi(x,t)=4{,}1\cdot e^{-0{,}03\cdot x}\cdot\sin(400\cdot t-0{,}1\cdot x)$, gdzie amplituda przesunięcia wyrażona jest w mikrometrach, t w sekundach, zaś x w metrach. Obliczyć:

   a) częstotliwość ν, okres T, długość fali λ i prędkość fali v;

   b) ile razy zmniejszy się amplituda przesunięcia na odcinku $\Delta x=3\cdot\lambda$;

   c) różnicę faz drgań fali w dwóch punktach, w których amplituda przesunięcia różni się o 10 %.

8. W ośrodku rozchodzi się izotropowa sferyczna fala tłumiona o częstotliwości ν=450 Hz i prędkości fazowej v=500 m/s. W odległości r_1=4 m od żródła amplituda prędkości A_{v1}=2 m/s, zaś w odległości r_2=10 m jest ona n=8 razy mniejsza. Obliczyć:

   a) współczynnik tłumienia fali;

   b) amplitudę przesunięcia w odległości r_3=20 m od źródła fali;

   c) odległość punktu od źródła, w którym amplituda wychylenia zmniejszyła się w porównaniu z punktem r_1 o m=1000 razy.

9. Punktowe źródło fal sferycznych położone jest na osi x w punkcie o współrzędnej x_0. W punkcie x_1=1 m amplituda przemieszczenia cząstek ośrodka wywołana sferyczną falą nietłumioną wynosi A_1=0,1 mm, zaś w punkcie x_2=10 m wynosi A_2=0,12 mm. Obliczyć wartość x_0.

10. W jednorodnym ośrodku powstała płaska fala stojąca o równaniu: $\psi(x,t)=4\cdot\sin(100\cdot t)\cdot\sin(0,5\cdot x)$, gdzie przesunięcie wyrażone jest w mikrometrach, t w sekundach, zaś x w metrach. Obliczyć:

a) współrzędne punktów z przedziału (0, 50 m), w których amplitudy przesunięcia, prędkości i względnej deformacji są maksymalne;
b) maksymalną amplitudę przesunięcia i prędkości cząstek ośrodka;
c) maksymalną amplitudę względnej deformacji.

11. Źródło fali płaskiej znajduje się w odległości d=10 m od ściany (gęstszej od ośrodka) ustawionej prostopadle do promienia falowego. Długość fali w ośrodku λ=4 m. Obliczyć współrzędne punktów, w których znajdują się węzły i strzałki powstałej fali stojącej.

12. Źródło fali płaskiej znajduje się w odległości d=10 m od ściany (mniej gęstej od ośrodka) ustawionej prostopadle do promienia falowego. Częstotliwość fali ν=100 Hz, a prędkość fali w ośrodku v=340 m/s. Obliczyć współrzędne punktów, w których znajdują się węzły i strzałki powstałej fali stojącej.

13. Długość fali w powietrzu λ=80 cm, zaś jej prędkość v_p=340 m/s. Fala ta przechodzi do metalu, gdzie jej prędkość wynosi v_m=4500 m/s. Jaka jest różnica faz tej fali pomiędzy dwoma punktami w metalu, odległymi od siebie o x=15 m?

14. Obliczyć zależność pomiędzy prędkością grupową u i fazową v dla następujących związków dyspersyjnych:

a) $v=const\cdot\lambda^{-1/2}$ b) $v=const\cdot\lambda^{-1}$ c) $v=const\cdot\omega^{-2}$

15. Współczynnik załamania światła dla siarkowodoru przyjmuje następujące wartości dla poniższych długości fal:

λ[nm]	n
509	1.647
534	1.640
589	1.630

Obliczyć, jaka jest prędkość fazowa i grupowa światła dla siarkowodoru w pobliżu λ=534 nm.

7.2. Efekt Dopplera dla fal akustycznych i elektromagnetycznych

(Przyjąć, że prędkość dźwięku w powietrzu wynosi c=340 m/s)

1. Gdy pociąg przejeżdża w pobliżu nieruchomego obserwatora to zauważa on skokową zmianę wysokości tonu emitowanego przez lokomotywę. Jaka jest prędkość pociągu, gdy ten skok wysokości wynosi k=10 %?

2. Stacja lokacyjna na brzegu morza wysyła w powietrzu falę ultradźwiękową o częstotliwości ν=100 kHz w kieruku zbliżającego się okrętu. Jaka będzie częstotliwość dudnień (nałożenie fali padającej i odbitej od okrętu), jeżeli prędkość okrętu v=30 km/godz.?

3. Pociąg jadący z prędkością v=100 km/godz. emituje sygnał dźwiękowy trwający (w jego układzie odniesienia) τ=3s. Jak długo będzie trwał ten sygnał dla obserwatora stojącego przy torach, gdy: a) pociąg przybliża się; b) pociąg oddala się.

4. Głośnik fal dźwiękowych wysyłający falę o częstotliwości ν=500 Hz zaczepiony na końcu sznura o długości l=10 m wiruje w płaszczyźnie poziomej, wykonując jeden obrót w czasie T=0,4 s. Jaki jest przedział częstotliwości odbieranych przez obserwatora stojącego w odległości d=15 m od osi obrotu głośnika? Jaki jest odstęp czasu pomiędzy chwilami rejestracji największej i najmniejszej częstotliwości przez obserwatora?

5. Głośnik fal dźwiękowych wysyłający falę o częstotliwości ν=500 Hz spada swobodnie (pominąć opór powietrza) z wysokości h=1000 m. Obserwator stoi tuż obok punktu upadku głośnika. Jaką częstotliwość dźwięku odbierze obserwator po t=10 s od chwili początku spadku głośnika, a jaką tuż przed końcem spadku?

6. Źródło fali dźwiękowej o częstotliwości ν=1000 Hz porusza się z prędkością v_1=70 km/godz. wzdłuż osi x, natomiast odbiornik porusza się z prędkością v_2=90 km/godz. wzdłuż osi y. Zakładając, że źródło i odbiornik rozpoczęły ruch w tym samym momencie w początku układu odniesienia, obliczyć częstotliwość fali zarejestrowanej przez odbiornik w chwili t=10 s.

7. Drgający kamerton o częstotliwości ν=2000 Hz porusza się z prędkością v_1=7 m/s wzdłuż linii prostopadłej do nieruchomej ściany. Wzdłuż tej samej linii, ale dalej od ściany porusza się ku ścianie odbiornik, mający prędkość v_2=9 m/s. Jaką częstotliwość dudnień fali odbitej od ściany i dochodzącej bezpośrednio zarejestruje odbiornik?

8. Udowodnić, że gdy względna prędkość źródła fali elektromagnetycznej względem odbiornika v<<c (tzn. β=v/c<<1), to względna zmiana częstotliwości, dana równaniem

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cdot\cos\vartheta} - 1,$$

słusznym w ogólnym przypadku, sprowadza się do prostszego równania

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{v}{c}\cdot\cos\vartheta$$

W powyższych wzorach θ jest kątem pomiędzy kierunkiem prędkości źródła a kierunkiem ku obserwatorowi.

9. Do radaru wysyłającego falę o częstotliwości ν=2 GHz zbliża się z prędkością v=500 km/godz. samolot. Fala odbita od samolotu zdudniana jest z falą wysyłaną przez radar. Jaka będzie częstotliwość obserwowanych dudnień?

10. Wzbudzony jon He^{+} emituje falę świetlną o długości λ=410 nm. Wiązka tych jonów porusza się wzdłuż prostej z taką prędkością, że energia kinetyczna każdego jonu T=20 MeV. Jaką długość fali od tej wiązki jonów zarejestruje obserwator, gdy kąt obserwacji wynosi:

a) θ=0° (wzdłuż oddalającej sie wiązki);
b) θ=30° ;
c) θ=90° (prostopadle do wiązki).

11. Spektroskop rejestruje widmo gwiazdy podwójnej, składające się z dwu gwiazd o tej samej masie. Maksymalne rozszczepienie linii widmowych $(\Delta\lambda/\lambda)_m=1{,}2\cdot10^{-4}$ i powtarza się co τ=30 dni. Obliczyć odległość pomiędzy gwiazdami oraz ich masy.

12. Okres obrotu Słońca na jego równiku wynosi T=24,7 dnia, zaś jego promień równikowy R=0,7 Gm. Jakie przesunięcie dopplerowskie obserwowane będzie dla fal o długości λ=550 nm emitowanych z dwu przeciwległych krańców tarczy słonecznej?

13. Przyjmując, że wartość stałej Hubble'a wynosi 55 km/(s·Mps), obliczyć odległość do galaktyki, w widmie której linia wodoru o długości λ=434 nm (w laboratorium) obserwowana jest dla λ_{ob}=780 nm.

14. Widmo promieniowania reliktowego jest równoważne widmu ciała doskonale czarnego o temperaturze T=2,736 K. Wskutek efektu Dopplera wykazuje ono niewielką anizotropię, wywołaną ruchem Słońca wokół Galaktyki v_g=250 km/s i ruchu Galaktyki względem promieniowania reliktowego v_r=560 km/s. Największą anizotropię mierzy się w kierunku α=120° względem kierunku ruch Słońca wokół Galaktyki. Obliczyć wielkość a=ΔT/T tej anizotropii.

7.3. Prędkość fali dźwiękowej w różnych ośrodkach

1. Wspólczynnik ściśliwości czystej wody w temperaturze t=20°C wynosi k=$4{,}555\cdot10^{-10}$ m^2/N, zaś gęstość wody w tej temperaturze jest równa ρ=998,2 kg/m^3. Jaką długość ma w tej wodzie fala akustyczna o częstotliwości ν=2 kHz ?

2. Załóżmy, że temperatura w oceanie maleje liniowo od t_p=15°C na powierzchni do t_g=4 °C na głebokości z_g=1500 m, a potem jest stała aż do dna H=5 km. Niech zasolenie jest wszędzie stałe i równe S=35 ‰. Załóżmy ponadto, że ciśnienie hydrostatyczne P można wyrazić wzorem $P=\rho\cdot g\cdot z$, gdzie $\rho=(1+S\cdot10^{-3})\cdot10^3$ $[kg/m^3]$. Korzystając ze wzoru Wilsona narysować głębokościowy rozkład prędkości dźwięku w takim oceanie.

3. Załóżmy, że woda tuż przy powierzchni morza ma temperaturę t=10° i zasolenie S=35‰. Korzystając ze wzoru Medwina, obliczyć:
   a) prędkość dźwięku w tej wodzie;
   b) procentową zmianę prędkości dźwięku wywołaną wzrostem temperatury o 1°C;
   c) procentową zmianę prędkości dźwięku wywołaną wzrostem zasolenia o 1 ‰;
   d) jaki wzrost głębokości spowoduje taką samą zmianę jak w punktcie b) i w punkcie c).

4. Załóżmy, że woda tuż przy powierzchni morza ma temperaturę t=5° i zasolenie S=20‰. Korzystając ze wzoru Medwina, obliczyć jaki przyrost
   a) temperatury; b) zasolenia; c) głębokości
spowoduje zmianę prędkości dźwięku w wodzie w tych warunkach o jeden procent.

5. Ile razy prędkość dźwięku w powietrzu w lecie (t_l=30°C) jest większa niż prędkość dźwięku w zimie (t_z=−15°C) ?

6. Temperatura gazu doskonałego zwiększyła się o 5 %. O ile procent zwiększyła się długość fali dźwiękowej w tym gazie ?

7. Temperatura powietrza tuż przy powierzchni ziemi wynosi t_p=15°C i maleje wraz z wysokością liniowo z gradientem a=6 mK/m. Na jaką maksymalną wysokość dotrze dźwięk wysłany z powierzchni Ziemi po czasie τ=20 s ?

7.4. Energia fali, poziom intensywności i głośności fali akustycznej

1. Fala dźwiękowa przechodzi przez przeszkodę w wyniku czego poziom intensywności dźwięku maleje o L=30 dB. Ile razy zmalała intensywność dźwięku?

2. Jaki jest poziom intensywności dźwięku, gdy jego natężenie jest równe:
   a) 15 pW/m^2 , b) 30 $\mu W/m^2$, c) 20 mW/m^2, d) 4 W/m^2.

3. Dwa dźwięki: pierwszy o częstotliwości ν_1=100 Hz, drugi o częstotliwości ν_2 =10 kHz mają ten sam poziom głośności L_g=75 fonów. Obliczyć poziomy intensywności tych dźwięków. Zakładając, że dźwięki te rozchodzą się w powietrzu w warunkach normalnych obliczyć także odpowiadającą im amplitudę ciśnienia akustycznego.

4. Jaka jest moc izotropowego źródła, emitującego dźwięk o częstotliwości ν=1500 Hz, gdy w odległości l= 30 m od niego poziom głośności L_g=75 fonów?

5. Poziom intensywności dźwięku od jednego pracującego silnika wynosi L=70 dB. Jaki będzie ten poziom, gdy równocześnie pracują trzy takie same silniki? Ile silników powinno pracować, aby poziom intensywności wynosił L_1=80 dB?

6. W odległości l_1=20 m od punktowego, izotropowego źródła dźwięku poziom głośności wynosi L_1=40 fonów. Jaki będzie ten poziom w odległości l_2=50 m od tego źródła dźwięku? W jakiej odległości od źródła dźwięk nie będzie słyszany?

7. Decybelowy współczynnik pochłaniania dźwięku w wodzie oceanicznej na częstotliwości ν=100 Hz wynosi $\alpha=10^{-6}$ dB/m. Ile razy zmaleje natężenie i ciśnienie akustyczne w płaskiej fali akustycznej po przebyciu odległości l=30 km?

8. Decybelowy współczynnik pochłaniania dźwięku w wodzie oceanicznej na częstotliwości ν_1=100 Hz wynosi $\alpha_1=10^{-6}$ dB/m, zaś na częstotliwości ν_2=10 kHz ma wartość $\alpha_2=10^{-3}$ dB/m. Jaką odległość musi przebyć płaska fala o częstotliwości ν_2, aby ulec takiemu samemu osłabieniu, jakiemu ulega fala o częstotliwości ν_1 przebywająca odległość l = 10 km?

9. Poziom intensywności fali akustycznej w powietrzu i w wodzie (ρ_w/ρ_p=770, c_p/c_w=0,22) jest taki sam i wynosi L=50 dB. Ile razy różni się ciśnienie akustyczne tej fali w wodzie w porównaniu z powietrzem?

7.5. Fale dźwiękowe w morzu

1. Monochromatyczna fala akustyczna o częstotliwości ν= 100 Hz ulega pewnemu osłabieniu po przebyciu odległości l= 1000 km. Zakładając, że współczynnik pochłaniania fal dźwiękowych rośnie z kwadratem częstotliwości, obliczyć odległość jaką przebędzie fala o częstotliwości ν= 5 kHz ulegając takiemu samemu osłabieniu.

2. W oceanie prędkość dźwięku c rośnie liniowo z głębokością: $c(z)=c_0(1+a\cdot z)$, gdzie c_0=1440 m/s, $a=1{,}2\cdot10^{-5}$ m^{-1}. Głębokość oceanu H=5 km. Źródło dźwięku znajduje się tuż przy powierzchni wody. Obliczyć:

a) promień krzywizny toru promieni dźwiękowych;

b) największą głębokość na jaką dojdą promienie dźwiękowe wysłane pod kątem poślizgu α_0=10°;

c) kąt poślizgu promieni docierających stycznie do dna;

d) najmniejszą horyzontalną odległość na powierzchni oceanu (długość cyklu), na jaką dotrze promień wysłany pod kątem α_1=5°;

e) maksymalną długość cyklu w tym kanale dźwiękowym;

f) współczynnik uwięzienia energii w tym kanale dźwiękowym.

3. W oceanie z głębokościowym gradientem prędkości dźwięku takim jak w poprzednim zadaniu, źródło dźwięku znajduje się na głębokości d=1,5 km. Obliczyć:

a) kąt poślizgu emisji promienia dźwiękowego docierającego stycznie do dna;

b) kąt poślizgu, pod jaki dotrze promień wysłany horyzontalnie;

c) maksymalną długość cyklu dla takiego źródła;

d) współczynnik uwięzienia energii w tym kanale dźwiękowym.

4. W oceanie z głębokościowym gradientem prędkości dźwięku takim jak w poprzednim zadaniu opuszczane jest ze stałą prędkością v=1 m/s źródło dźwięku, emitujące fale akustyczne w kącie bryłowym $\Omega=10°$ wokół linii pionowej. Jak zmienia się z czasem powierzchnia oceanu 'oświetlona' bezpośrednio energią akustyczną ze źródła fali?

5. W oceanie z poprzedniego zadania źródło dźwięku znajduje się tuż pod powierzchnią wody, natomiast odbiornik fali na głębokości d=1 km, w odległości horyzontalnej l=2 km. Pod jakim kątem poślizgu należy wysłać promień dźwiękowy, aby bez odbić dotarł do odbiornika? Pod jakim kątem dotrze ten promień do odbiornika?

6. Załóżmy, ze temperatura warstwy wody oceanu do głębokości h=100 m jest stała i równa $t_p=10°C$, a poniżej liniowo maleje wraz z głębokością, osiągając na dnie (H=600 m) wartość $t_d=4°C$. Załóżmy ponadto, że zasolenie jest wszędzie takie samo i jest równe S=35 ‰.

a) Posługując się wzorem Lewina narysować głębokościowy profil zmian prędkości dźwięku.

b) Na jakiej głębokości prędkość dźwięku jest taka sama jak na powierzchni oceanu ?

c) Jaki jest maksymalny kąt poślizgu promienia wysłanego ze źródła na powierzchni, pozostającego cały czas w kanale dźwiękowym?

7. Głębokość, na której prędkość dźwięku jest najmniejsza ($c_{min}=1400$ m/s) w pewnym morzu wynosi h= 1 km i tam też znajduje się źródło dźwięku. Powyżej i poniżej źródła prędkość dźwięku zmienia się liniowo z głębokością z gradientami równymi odpowiednio $a_1=-10^{-6}$ m^{-1} i $a_2=10^{-5}$ m^{-1}.

a) Obliczyć kąt poślizgu wysłanego promienia dźwiękowego, docierającego stycznie do powierzchni morza.

b) W jakiej horyzontalnej odległości od źródła znajduje się ten punkt na powierzchni morza?

c) Na jaką największą głębokość zanurzy się następnie ten promień?

d) Pod jakim kątem dotrze do powierzchni promień, który wcześniej był styczny do dna morza?

e) Jaki jest współczynnik uwięzienia energii w tym kanale dźwiękowym ?

8. Rozpatrzmy morze, w którym pionowy rozkład temperatury jest następujący: początkowo maleje ona liniowo z głębokością od wartości powierzchniowej $t_p=13°C$ do temperatury $t_g=3°C$ na głębokości h=1000 m. Poniżej, aż do samego dna (H=3000 m) temperatura pozostaje stała. Załóżmy ponadto, że zasolenie jest wszędzie takie samo i wynosi S=35 ‰.

a) Posługując się wzorem Lewina wykreślić głębokościowy profil zmian prędkości dźwięku.

b) Jakiego rodzaju jest to podwodny kanał dźwiękowy i pomiędzy jakimi głębokościami się zawiera?

c) Jaki jest zakres kątów emisji dźwięku przez źródło na głębokości d=1500 m, które będą cały czas pozostawały w tym kanale?

9. Rozpatrzmy następujący głębokościowy profil prędkości dźwięku w pewnym morzu: przy powierzchni morza $v_p=1500$ m/s i do głębokości h=1000 m maleje liniowo osiągając tam

wartość v_1=1480 m/s. Od tej głębokości aż do dna (H=2 km) prędkość rośnie liniowo do wartości v_d=1490 m/s. Niech źródło dźwięku znajduje się na głębokości x=500 m.

a) Narysować tory promieni dźwiękowych wysłanych pod następującymi kątami poślizgu: $\alpha=\pm45°, \pm30°, \pm15°$.
b) Pod jakim kątem należy wysłać promień, aby był on styczny do dna ?
c) Pod jakim kątem należy wysłać promień, aby był on styczny do powierzchni morza?
d) Jaki jest współczynnik uwięzienia energii w tym kanale dźwiękowym?

7.6. Przechodzenie fal przez granicę ośrodków

1. Monochromatyczna , płaska fala dźwiękowa o częstotliwości ν=100 Hz i poziomie głośności L_g=90 dB pada pod kątem $\alpha=5°$ do normalnej na powierzchnię wody z powietrza. Obliczyć:

a) poziom intensywności L padającej fali;
b) amplitudę ciśnienia akustycznego w padającej fali;
c) kąt załamania fali w wodzie;
d) ciśnieniowy współczynnik transmisji W i odbicia V fali dźwiękowej;
e) poziom głośności fali odbitej i załamanej;
f) energetyczny współczynnik odbicia tej fali od powierzchni wody.

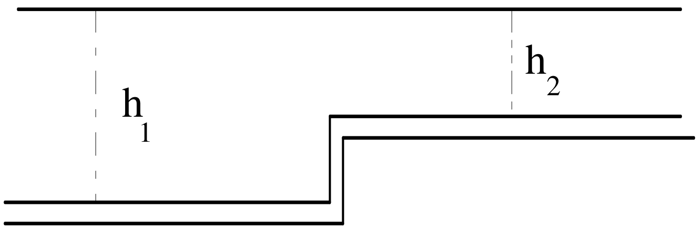
2. Monochromatyczna , płaska fala dźwiękowa o częstotliwości ν=1000 Hz i poziomie głośności L_g=90 dB pada pod kątem $\alpha=25°$ do normalnej z wody na granicę rozdziału woda-powietrze. Obliczyć:

a) poziom intensywności L padającej fali;
b) amplitudę ciśnienia akustycznego w padającej fali;
c) kąt załamania fali w powietrzu;
d) ciśnieniowy współczynnik transmisji W i odbicia V fali dźwiękowej;
e) poziom głośności fali odbitej i załamanej;
f) energetyczny współczynnik odbicia tej fali od powierzchni wody.

3. Monochromatyczna, płaska fala dźwiękowa o częstotliwości ν=500 Hz i poziomie głośności L_g=60 dB pada pod kątem $\alpha=25°$ do normalnej z wody na piaskowe dno (c_p=1800 m/s, ρ_p=2000 kg/m^3) oceanu. Obliczyć:

a) poziom intensywności L padającej fali;
b) amplitudę ciśnienia akustycznego w padającej fali;
c) kąt załamania fali w piasku;
d) ciśnieniowy współczynnik transmisji W i odbicia V fali dźwiękowej;
e) poziom głośności fali odbitej i załamanej;
f) energetyczny współczynnik odbicia tej fali od powierzchni piasku.

4. Na poniższym rysunku przedstawiono schematycznie przekrój poprzeczny nieskończonie dużego zbiornika z wodą.



Z lewej strony, gdzie głębokość wody wynosi h_1=4 m, na granicę rozdziału pada pod kątem α=30° płaska fala grawitacyjna o długości $\lambda >> h_1$. Pod jakim kątem do granicy rozdziału poruszać sie będzie ta fala w tej części zbiornika, gdzie głębokość wody wynosi h_2=1 m?

5. Planeta o promieniu R=6000 km składa się z dwu warstw: ciekłego jądra o promieniu r=3000 km i stałego, zewnętrznego płaszcza. Prędkość sejsmicznej fali podłużnej w jądrze v_1=9 km/s, zaś w płaszczu v_2=10 km/s. Obliczyć wielkość strefy cienia sejsmicznego dla fal P i S.

6. Światło monochromatyczne o częstotliwości $\nu = 2\cdot 10^{15}$ Hz pada ze szkła o współczynniku załamania n=1,54 do powietrza. Kąt padania θ=35° do normalnej.

a) Jaka jest długość fali tego światła w szkle, a jaka w powietrzu?

b) Jaki kąt tworzy ta wiązka światła z normalną w powietrzu?

c) Jaki musiałby być minimalny kąt padania, aby wiązka nie przeszła do powietrza?

7.7. Interferencja fal

1. Płaska fala monochromatyczna o długości λ pada prostopadle na przesłonę z N wąskimi szczelinami, odległymi od siebie o d. Na ekranie odległym od przesłony o l obserwuje się układ prążków interferencyjnych. Rozpatrując przypadek interferencji promienii równoległych ugiętych pod kątem ϕ, udowodnić, że:

a) amplituda sumarycznego drgania na ekranie, wywołanego przez promienie ugięte pod kątem ϕ jest równa

$$A = a \cdot \frac{sin\left(\frac{N\alpha}{2}\right)}{sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot sin(\phi)$$

zaś a jest amplitudą drgania od pojedynczego promienia.

Wskazówka: posłużyć się metodą graficznego sumowania drgań.

b) natężenie fali $I(\phi)$ ugiętej pod kątem ϕ w odpowiednim punkcie na ekranie jest równe

$$I(\phi) = \frac{I(0)}{N^2} \cdot \frac{sin^2\left(\frac{N\pi}{\lambda} d \cdot sin(\phi)\right)}{sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} d \cdot sin(\phi)\right)}$$

c) Obliczyć współrzędne punktów na ekranie, w których obserwuje się maksima i minima natężenia fali.

d) Obliczyć stosunek natężenia pierwszych trzech jasnych prążków do natężenia prążka centralnego.

2. Płaska fala monochromatyczna o długości λ=500 nm pada prostopadle na przesłonę z dwoma wąskimi szczelinami, odległymi od siebie o Δx=0.1 mm. Na ekranie odległym od szczelin o l=3 m obserwuje się prążki interferencyjne.

a) Jaka jest odległość pomiędzy sąsiednimi jasnymi prążkami na ekranie?

b) Jakie jest względne natężenie fali (w stosunku do natężenia maksymalnego) w punkcie odległym o x_1=3 mm od prążka centralnego?

c) Jaka byłaby odległość pomiędzy sąsiednimi jasnymi prążkami, gdy cały układ umieścić w wodzie (n=1,33)?

d) O jaką odległość przesunie się układ prążków i w którą stronę, gdy lewą szczelinę przesłonimy płytką szklaną (n=1,5) o grubości h=0,1 mm?

e) Ile prążków obserwowano by na ekranie, gdyby fala nie była monochromatyczna, a jej stopień monochromatyczności wynosił ($\Delta\lambda/\lambda$)=0,002?

3. Fala świetlna o długości λ=600 nm pochodząca z oddalonego źródła pada normalnie na powierzchnię szklanego klina (n=1,55). W świetle odbitym obserwuje się na powierzchni klina układ prążków interferencyjnych. Dwa sąsiednie prążki są odległe od siebie o Δx=3 mm.

a) Jaki jest kąt zbieżności pomiędzy powierzchniami tworzącymi tego klina?

b) Jakie będzie względne natężenie światła w punkcie odległym o 10 mm od wierzchołka klina?

c) Jaka byłaby odległość pomiędzy prążkami, gdyby kąt zbieżności klina zwiększyć o k=20 % ?

d) Jaki jest stopień monochromatyczności światła, gdy obserwuje się 50 prążków?

4. Warstwa oliwy (n=1,6) na wodzie ma grubość b=200 nm i jest oświetlona równoległą wiązką światła białego.

a) Udowodnić, że warunek na maksima interferencyjne światła o długości λ, odbitego od cieńkiej warstwy o grubości b obliczyć można z równania:

$$2b\sqrt{n^2 - \sin^2\theta} = (k + 1/2)\cdot\lambda,$$

gdzie k jest liczbą całkowitą, θ kątem padania, zaś n współczynnikiem załamana warstwy.

b) Jaki jest kąt padania tego światła, gdy w świetle odbitym plama oliwy jest zabarwiona na niebiesko?

7.8. Dyfrakcja fal

1. Płaska, monochromatyczna wiązka światła o długości λ pada prostopadle na prostokątną szczelinę o szerokości b. Rozpatrując ugięcie w promieniach równoległych (dyfrakcja Fraunhofera):

a) udowodnić, że wiązka ugięta pod kątem ϕ da na ekranie falę o natężeniu $I(\phi)$ równą

$$I(\phi) = I(0)\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}b\cdot\sin(\phi)\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda}b\cdot\sin(\phi)\right)^2}$$

b) obliczyć, pod jakimi kątami obserwuje się na ekranie minima natężenia światła;

c) obliczyć stosunek natężeń pierwszych trzech jasnych prążków do natężenia prążka centralnego.

d) Jaki byłby warunek na kąty ugięcia światła biegnącego ku minimum, gdyby fala padała na szczelinę nie prostopadle, ale pod kątem β?

2. Płaska, monochromatyczna wiązka światła o długości λ pada prostopadle na okrągła szczelinę o promieniu $R.=5\lambda$ Rozpatrując ugięcie w promieniach równoległych obliczyć średnicę centralnego maksimum dyfrakcyjnego na ekranie odległym od otworu o $l=3$ m.

3. Jaka powinna być optymalna średnica otworku w bezsoczewkowym aparacie fotograficznym, aby jego zdolność rozdzielcza była maksymalna? Jaka będzie wtedy wielkość obrazu na kliszy od świecącego punktu znajdującego się w nieskończoności?

4. Jaka powinna być minimalna średnica teleskopu, za pomocą którego można rozróżnić na Księżycu dwa punkty odległe od siebie o $x=100$ m?

5. Dwie niebieskie ($\lambda=430$ nm) żarówki oddalone od siebie o $l=15$ cm oglądane są przez teleskop z odległości $x=20$ km. Jaka powinna być minimalna średnica tego teleskopu, aby za jego pomocą można było zobaczyć te żarówki oddzielnie?

6. Siatka dyfrakcyjna o szerokości $l=2$ cm ma 40 szczelin na 1 mm. Siatką tą ogląda się świecącą lampę sodową ($\lambda_1=589{,}0$ nm i $\lambda_2=589{,}6$ nm). Obliczyć wszystkie kąty ugięcia, pod jakim obserwuje się maksima dyfrakcyjne. Czy siatka ta potrafi rozszczepić dublet sodowy? Jaka musiałaby być szerokość siatki, aby dublet sodowy został rozszczepiony w drugim rzędzie ugięcia?

7. Monochromatyczna wiązka równoległych promieni rentgenowskich o długości $\lambda=150$ pm pada na próbkę polikrystaliczną ulegając dyfrakcji. Na ekranie odległym od próbki o $l=10$ cm powstaje układ pierścieni dyfrakcyjnych. Jakie będą promienie tych pierścieni, gdy dyfrakcja zachodzi na płaszczyznach atomowych odległych od siebie o $d=300$ pm ?

8. Monochromatyczna wiązka promieniowania rentgenowskiego o długości $\lambda=0{,}17889$ nm pada na płytkę monokryształu NaCl wyciętą tak, że płaszczyzny atomowe, równoległe do powierzchni, na które pada promieniowanie są odległe od siebie o $d=0{,}3255$ nm. Dla jakich kątów padania promieniowania pojawią się wiązki odbite zwierciadlanie od tej płytki?

9. Monochromatyczna wiązka równoległych promieni rentgenowskich o długości $\lambda=162$ pm pada pod kątem poślizgu α na jednowymiarowy kryształ o stałej sieci $d=260$ pm. Obliczyć kąty poślizgu odpowiadające wszystkim maksimom dyfrakcyjnym, gdy kąt poślizgu wiązki padającej jest równy: a) $\alpha=90°$; b) $\alpha=50°$.

10. Monochromatyczna wiązka równoległych promieni rentgenowskich o długości $\lambda=180$ pm pada prostopadle na dwuwymiarowy kryształ o stałych sieciowych $a=0{,}3$ nm i $b=0{,}5$ nm. Na ekranie, odległym od kryształu o $l=8$ cm i ustawionym równolegle do niego powstaje obraz dyfrakcyjny. Obliczyć położenie wszystkich maksimów dyfrakcyjnych na tym ekranie.