

## 4. Pole grawitacyjne

Stać:  $G=6,672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$     Z-Ziemia, K-Księżyc, S-Słońce  
 $R_Z=6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$      $l_{ZS}=1,49598 \cdot 10^{11} \text{ m}$      $l_{ZK}=3,8475 \cdot 10^8 \text{ m}$ .  
 $M_Z=5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$      $M_K=M_Z/81,3$      $M_S=1,99891 \cdot 10^{30} \text{ kg}$      $R_S=6,95 \cdot 10^8 \text{ m}$

### 4.1. Przyspieszenie grawitacyjne

4.1.1. Traktując Ziemię jako jednorodną kulę, obliczyć wartość przyspieszenia grawitacyjnego  $g$  :

- a) w środku Ziemi;    b) na głębokości równej połowie promienia Ziemi;
- c) na orbicie satelity krążącego na wysokości  $h=300 \text{ km}$  nad Ziemią;
- d) na orbicie satelity stacjonarnego; e) na orbicie Księżyca.

4.1.2. Obliczyć wartość przyspieszenia grawitacyjnego wywołanego Słońcem:

- a) na powierzchni Słońca,    b) na orbicie Ziemi.

W jakiej odległości od Słońca wartość tego przyspieszenia wynosi  $9,81 \text{ m/s}^2$ ?

4.1.3. Na powierzchni planety o promieniu  $r=1000 \text{ km}$  wartość przyspieszenia grawitacyjnego wynosi  $g=2 \text{ m/s}^2$ . Jaka jest średnia gęstość tej planety? W jakiej odległości od jej powierzchni wartość przyspieszenia grawitacyjnego wynosi  $g=1 \text{ m/s}^2$ ?

4.1.4. Jaki byłby okres sekundowego wahadła matematycznego sporządzonego na Księżycu i przeniesionego na Ziemię?

4.1.5. Jeden z dwóch takich samych zegarów wahadłowych został na okres jednej doby przeniesiony na wysokość  $h=20 \text{ km}$  nad powierzchnię Ziemi. Jaką różnicę czasu pokażą te dwa zegary po ich ponownym spotkaniu?

4.1.6. Obliczyć różnicę przyspieszeń grawitacyjnych wywołanych

- a) Księżycem,    b) Słońcem

na dwu przeciwległych krańcach Ziemi (najbliższym i najdalszym od danego ciała).

4.1.7. Obliczyć różnicę przyspieszeń grawitacyjnych wywołanych

- a) Ziemią,    b) Słońcem

na dwu przeciwległych krańcach Księżyca (najbliższym i najdalszym od danego ciała).

4.1.8. Eksperymentator posiada aparaturę do pomiaru przyspieszenia grawitacyjnego, pozwalającą wyznaczyć wartość  $g$  z dokładnością do  $0,01 \text{ m/s}^2$ . Na jaką wysokość nad powierzchnię Ziemi musiałby wznieść tę aparaturę, aby zauważyć zmianę wartości przyspieszenia grawitacyjnego? Na jaką głębokość pod powierzchnię Ziemi musiałby opuścić tę aparaturę, aby zauważyć zmianę wartości przyspieszenia grawitacyjnego?

4.1.9. Planeta składa się z dwu jednorodnych warstw: kulistej warstwy wewnętrznej o promieniu  $r_1=2000 \text{ km}$  i gęstości  $\rho_1=7000 \text{ kg/m}^3$  oraz warstwy zewnętrznej o grubości  $r_2=5000 \text{ km}$  i gęstości  $\rho_2=4000 \text{ kg/m}^3$ . Obliczyć wartość przyspieszenia grawitacyjnego w punktach odległych od środka planety o a)  $1000 \text{ km}$ , b)  $3000 \text{ km}$ , c)  $7000 \text{ km}$ , d)  $9000 \text{ km}$ .

4.1.10. Planeta o promieniu  $R=5000 \text{ km}$  składa się z dwu jednorodnych warstw: kulistej warstwy wewnętrznej o gęstości  $\rho_1=7000 \text{ kg/m}^3$  oraz warstwy zewnętrznej o gęstości  $\rho_2=4000 \text{ kg/m}^3$ . Jaka jest grubość warstwy wewnętrznej, gdy wiadomo, że wartość przyspieszenia grawitacyjnego na jej powierzchni wynosi  $g=6 \text{ m/s}^2$ .

4.1.11. Rozpatrzmy układ Ziemia-Księżyc. Znaleźć położenie punktu, w którym przyspieszenie grawitacyjne od Ziemi i od Księżyca ma wartość  $g=0,1 \text{ m/s}^2$ . Jaka jest wartość sumarycznego przyspieszenia grawitacyjnego w tym punkcie i jaki kąt tworzy ten wektor z kierunkiem ku Ziemi?

4.1.12. Obliczyć wartość przyspieszenia grawitacyjnego w punkcie równoodległym od Ziemi i Księżyca, tworzącym z tymi obu ciałami trójkąt równoboczny.

4.1.13. Na powierzchni jednorodnej planety o promieniu  $R=6000$  km i średniej gęstości  $\rho=5000$  kg/m<sup>3</sup> powstała stożkowa góra o wysokości  $h=10$  km i promieniu podstawy  $r=50$  km. Zakładając taką samą gęstość materiału góry jak i planety, oszacować wpływ góry na wartość i kierunek wektora przyspieszenia grawitacyjnego w punkcie znajdującym się na powierzchni planety: a) u podnóża góry ; b) w odległości  $x=500$  km od niej.

4.1.14. Tuż pod powierzchnią ziemi (średnia gęstość gruntu  $\rho=3$  g/cm<sup>3</sup>) powstała pusta kulista wnęka o promieniu  $r=200$  m. Jak i o ile zmieni się wartość przyspieszenia grawitacyjnego na powierzchni ziemi w punkcie nad tą wnęką?

#### 4.2. Energia potencjalna i potencjał grawitacyjny

4.2.1. Ciało o masie  $m=70$  kg znajduje się na powierzchni Ziemi. Obliczyć wartość energii potencjalnej tego ciała i wartość potencjału grawitacyjnego w tym punkcie.

4.2.2. Ciało o masie  $m=70$  kg spada swobodnie w tunelu z powierzchni Ziemi do jej środka. O ile zmieni się jego energia potencjalna? Jaka będzie jego prędkość w środku Ziemi, gdy na powierzchni była równa zero?

4.2.3. Dla jednorodnej planety o gęstości  $\rho$  i promieniu  $R$  sporządzić wykresy zależności przyspieszenia grawitacyjnego i potencjału grawitacyjnego w funkcji promienia wodzącego  $r$ , dla  $r$  od 0 do  $\infty$ . Jaka jest wartość potencjału grawitacyjnego na powierzchni planety i w jej środku?

4.2.4. Rozpatrzmy jednorodną planetę o promieniu  $R$  i masie  $M$ . O jaką część jej promienia należałoby się wznieść pewne ciało ponad jej powierzchnię, aby energia potencjalna tego ciała wzrosła o 0,5 %? O jaką część jej promienia należałoby zagłębić do jej wnętrza pewne ciało, aby energia potencjalna tego ciała zmalała o 0,5 %?

4.2.5. Ciało spada na powierzchnię Ziemi z wysokości  $h=30$  km (brak oporu powietrza). Jaka będzie prędkość tego ciała w chwili zderzenia z Ziemią?

4.2.6. Ciało zostało wyrzucone pionowo do góry z powierzchni Ziemi z prędkością  $v=10$  km/s (brak oporu powietrza). Na jaką wysokość wzniesie się to ciało?

4.2.7. Z jaką najmniejszą prędkością należałoby wyrzucić z Ziemi ciało, aby doleciało ono na Księżyc? A z jaką prędkością należałoby wyrzucić ciało z Księżyca, aby doleciało ono do Ziemi?

4.2.8. Druga prędkość kosmiczna na pewnej planecie o promieniu  $R=4000$  km wynosi  $v_2=5$  km/s. Jakie jest przyspieszenie grawitacyjne na wysokości  $h=1000$  km nad jej powierzchnią?

4.2.9. Satelita o masie  $m=500$  kg i przekroju poprzecznym  $S=3$  m<sup>2</sup> obiega Ziemię po orbicie kołowej, na wysokości  $h=250$  km nad jej powierzchnią. Na tej wysokości gęstość atmosfery wynosi  $\rho=10^{-11}$  kg/m<sup>3</sup>.

- Jaka siła tarcia działa na tego satelitę ? (Uwaga: zderzenia cząstek atmosfery z satelitą rozpatrywać jako całkowicie niesprężyste)
- Ile wynosi całkowita energia satelity ?
- O ile zmieni się ta energia w czasie jednego obiegu orbity ?
- O ile zmaleje promień orbity w czasie jednego obiegu ?
- O ile zmieni się prędkość w czasie jednego obiegu ?

#### 4.3. Przyspieszenie ziemskie

4.3.1. Wartość przyspieszenia ziemskiego na powierzchni Ziemi, w punkcie o szerokości geograficznej  $\varphi$  dobrze opisuje następujące wyrażenie:  $g(\varphi)=9.7805+0,0517 \cdot \sin 2\varphi$  [m/s<sup>2</sup>].

- Obliczyć wartość przyspieszenia ziemskiego w Szczecinie ( $\varphi=53^\circ 24'$ );

b) obliczyć szerokość geograficzną, na której wartość  $g$  jest średnią arytmetyczną dla równika i bieguna ziemskiego.

4.3.2. Obliczyć wartość przyspieszenia odśrodkowego i jego stosunek do przyspieszenia grawitacyjnego dla punktu

a) na równiku Ziemi, b) na szerokości geograficznej Szczecina ( $\varphi=53^{\circ}24'$ ).

4.3.3. Znając okres obiegu Księżyca wokół Ziemi ( $T_k=27,3217$  doby) oraz masy Ziemi  $M_Z$  i Księżyca  $M_K$ , obliczyć wartość siły dośrodkowej działającej na Księżyc.

4.3.4. Jaki kąt tworzy wektor przyspieszenia ziemskiego z kierunkiem do środka Ziemi w Szczecinie ( $\varphi=53^{\circ}24'$ )?

4.3.5. Jaki byłby kąt pomiędzy wektorem przyspieszenia ziemskiego a kierunkiem do środka Ziemi w Szczecinie ( $\varphi=53^{\circ}24'$ ), gdyby doba na Ziemi trwała  $T=10$  godzin? Jakie byłoby wtedy przyspieszenie ziemskie w Szczecinie?

4.3.6. Jak długo trwałaby doba na Ziemi, gdyby przyspieszenie ziemskie na równiku było o 10 % mniejsze niż na biegunie Ziemi?

4.3.7. Kulista planeta o promieniu  $R=3000$  km ma średnią gęstość  $\rho=3$  g/cm<sup>3</sup>. Zakładając, że długość doby na tej planecie wynosi  $T=10$  godzin, obliczyć, o ile procent różni się przyspieszenie spadku swobodnego na równiku od przyspieszenia na biegunie.

4.3.8. Zegar wahadłowy, prawidłowo chodzący na równiku ziemskim, został przeniesiony na biegun ziemski. Jak będzie chodził tam ten zegar i jaka będzie różnica czasu po jednej dobie z prawidłowo chodzącym zegarem na biegunie?

4.3.9. Jeden z dwu takich samych zegarów wahadłowych znajdujących się na równiku ziemskim został zabrany do samolotu, który obleciał z nim Ziemię wzdłuż równika w kierunku zachodnim. Zakładając, że lot odbywał się ze stałą prędkością i trwał dokładnie jedną dobę (na zegarze spoczywającym), obliczyć, jaki czas wskaże zegar ruchomy, gdy zegary ponownie się spotkają.