Terminy egzaminów

Transport	7 luty (środa), godzina 11.15, Budynek Międzywydziałowy, p. 726 (VII piętro)
Budowa Jachtów + Oceanotechnika	9 luty (piątek), godzina 12.15, Budynek Międzywydziałowy, p. 726 (VII piętro)
Egzamin poprawkowy (wszyscy)	16 luty (piątek), godzina 11.15, Budynek Międzywydziałowy, p. 726 (VII piętro)

Oceny egzaminacyjne

Egzamin w terminie zerowym zdali:	Emmanuel Ferber	3,5
	Kornelia Suchorab	3,0

Zadania do rozwiązania
Zadania już rozwiązane

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 - 9										
10 -19										
20 -29										
30-39										
40-49										
50-59										
60-69										
70-79										

Nr Zadania	Data wysłania	Student
3	29 grudzień	Edyta Żylińska
4	22 grudzień	Edyta Żylińska
5	22 grudzień	Edyta Żylińska
10	15 grudzień	Edyta Żylińska
14	22 grudzień	Edyta Żylińska
19	22 grudzień	Hubert Urbański
20	22 grudzień	Edyta Żylińska
21	29 grudzień	Mateusz Rybka
22	29 grudzień	Mateusz Rybka
23	29 grudzień	Mateusz Rybka
24	29 grudzień	Edyta Żylińska
25	5 styczeń	Edyta Żylińska
26	5 styczeń	Edyta Żylińska
27	12 styczeń	Mateusz Rybka
28	12 styczeń	Mateusz Rybka
35	26 styczeń	Wojciech Ferduła
36	5 styczeń	Edyta Żylińska
37	26 styczeń	Wojciech Ferduła
41	19 styczeń	Mateusz Rybka
43	23 styczeń	Kornelia Suchorab
53	26 styczeń	???
54	21 styczeń	Wojciech Ferduła
57	21 styczeń	Wojciech Ferduła
61	26 styczeń	???
70	26 styczeń	Wojciech Ferduła
75	26 styczeń	???

Kolejność wpłynięcia e-maila nie ma znaczenia, znaczenie ma jakość rozwiązania. Jeżeli uznam rozwiązanie za dobre, przypisane zostanie tylko jednej osobie.

Wymagania techniczne pliku przesyłanego e-mailem:
1. Jeden list, jedno zadanie w załączniku
2. Temat e-maila (subject line): Numer zadania
3. Plik (tylko z rozszerzeniem .doc lub .docx) z rozwiązaniem jako załącznik. W pliku czcionka Times New Roman 12 p., interlinia Co najmniej 15 p., tekst wyjustowany (równe lewy i prawy margines).
4. Wzory pisane jedynie za pomocą Edytora Równań, równania numerowane. W tekście odniesienie do każdego równania.
5. W pliku: Treść zadania, Dane, Szukane, Rozwiązanie (szczegółowe), Odpowiedź.

Zadanie nr 3. (Edyta Żylińska, 29.12.2017r)

Atmosfera fizyczna (atm), pozaukładowa jednostka ciśnienia, zdefiniowana jest jako ciśnienie słupa rtęci o gęstości ρ = 13,595 g/cm3 i o wysokości h = 76 cm, w polu grawitacyjnym g = 980,665 cm/s^2. Ilu paskalom odpowiada jedna atmosfera fizyczna?

Dane:

$\rho = 13{,}595 \frac{g}{cm^3}$

$h = 76\ cm$

$g = 980{,}665 \frac{cm}{s^2}$

$1\ Pa = \frac{1\ N}{1\ m^2} = \frac{1\ kg}{1\ m * s^2}$

Szukane:

$1\ atm = x\ [Pa]$

Wzór:

$1\ atm = \rho * h * g$

gdzie:

atm – atmosfera fizyczna

Pa – Paskal

ρ – gęstość słupa rtęci

h – wysokość słupa rtęci

g – pole grawitacyjne

Rozwiązanie:

Atmosfera fizyczna (atm), jest pozaukładową jednostka ciśnienia, zdefiniowaną jako ciśnienie słupa rtęci o gęstości ρ = 13,595 g/cm^3 i o wysokości h = 76 cm, w polu grawitacyjnym g = 980,665 cm/s^2. Jako, że atmosfera fizyczna jest jednostką *ciśnienia*, możemy ją zdefiniować jako wartość *siły* działającej prostopadle do powierzchni, podzieloną przez powierzchnię na jaką ona działa. Siłą, w omawianym przypadku, będzie iloczyn masy i przyspieszenia ziemskiego. W powyższym zadaniu wartość masy nie została określona. Została określona jednak wartość gęstości, która jest niczym innym jak stosunkiem masy substancji do zajmowanej przez nią objętości. Mamy więc określoną masę substancji w każdym cm^3 słupa. Jako, że wysokość słupa jest równa 76 cm, należy jego gęstość pomnożyć przez wysokość.

Wobec tego, aby otrzymać wartość ciśnienia należy obliczyć iloczyn gęstości, wysokości i przyspieszenia ziemskiego. Nie należy jednak zapomnieć o zmianie jednostek na metry i kilogramy, gdyż Paskal jest jednostką ciśnienia o wymiarze $\left[\frac{kg}{m*s^2}\right]$.

$$\rho = 13{,}595 \frac{g}{cm^3} = 13595 \ \frac{kg}{m^3} \qquad [1]$$

$$h = 76 \ cm = 0{,}76 \ m \qquad [2]$$

$$g = 980{,}665 \ \frac{cm}{s^2} = 9{,}80665 \ \frac{m}{s^2} \qquad [3]$$

$$1 \ atm = \rho * h * g = \ 13595 \ \frac{kg}{m^3} * 0{,}76 \ m * 9{,}80665 \ \frac{m}{s^2} \approx 101\ 324 \ Pa \qquad [4]$$

Przeliczenie jednostek:

$$\frac{kg}{m^3} * m * \frac{m}{s^2} = \frac{kg}{m*s^2} = Pa \qquad [5]$$

Czyli:

$x \approx 101\ 324$, 1 atm $\approx 101\ 324$ Pa

<u>Odpowiedź:</u> 1 atm odpowiada w przybliżeniu 101 324 Pa.

Zadanie nr 4. (Edyta Żylińska, 22.12.2017)

W brytyjskim systemie miar występuje jednostka ciśnienia psi (funt na cal kwadratowy – ang. pound per square inch). Przyjmując, że 1 funt = 0,45359237 kg, a 1 cal = 2,54 cm, obliczyć ilu paskalom odpowiada 1 psi.

Dane:

$1 \ funt \ (lb) = \ 0{,}45359237 \ kg$

$1 \ cal \ (in) = 2{,}54 \ cm$

$1 \ psi = \frac{1 \ funt}{1 \ cal}$

$1 \ Pa = \frac{1 \ N}{1 \ m^2} = \frac{kg}{m*s^2}$

$g \approx 9{,}80665 \ \frac{m}{s^2}$

Szukane:

$1 \ psi = \ x \ [Pa]$

Wzór:

$1 \ psi = \frac{N}{A} = \frac{m*g}{A} \left[\frac{kg}{m*s^2}\right]$

gdzie:

m – masa $[kg]$

g - przyspieszenie ziemskie $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

A – powierzchnia $[m^2]$

m – metr

s – sekunda

g – przyspieszenie ziemskie

Rozwiązanie:

Jako, że jednostka psi odnosi się do jednego funta podzielonego przez jeden cal kwadratowy, aby obliczyć powyższe zadanie, w pierwszej kolejności należy 1 cal podnieść do kwadratu.

$$(1\ cal)^2 = (2{,}54\ cm)^2 = 6{,}4516\ cm^2 \qquad [1]$$

Następnie, jako że we wzorze występują metry, powyższy wynik zamieniamy na metry.

$$6{,}4516\ cm^2 = 0{,}00064516\ m^2 \qquad [2]$$

$$1\ psi = \frac{N}{A} = \frac{m*g}{A} \qquad [3]$$

1 $Niuton$ odpowiada sile, z jaką należy działać na ciało o masie m, aby nadać mu przyspieszenie równe $1\frac{m}{s^2}$. 1 $funt$ odpowiada masie 0,45359237 kg, w związku z czym do powyższego wzoru w liczniku należy podstawić iloczyn 0,453592 kg i przyspieszenia ziemskiego ($9{,}80665\ \frac{m}{s^2}$). W mianowniku należy podstawić powierzchnię w m^2, czyli $0{,}00064516\ m^2$.

Stąd:

$$1\ psi = \frac{N}{s} = \frac{m*g}{s} = \frac{0{,}45359237\ kg * 9{,}80665\ \frac{m}{s^2}}{0{,}00064516\ m^2} \approx \frac{4{,}44822162\ kg*\frac{m}{s^2}}{0{,}00064516 m^2} \approx 6894{,}7573\ [Pa] \qquad [4]$$

Przeliczenie jednostek: $\left[\frac{kg*\frac{m}{s^2}}{m^2} = \frac{kg*m}{s^2} * \frac{1}{m^2} = \frac{kg}{m*s^2} = Pa\right]$ [5]

Czyli:

$$x \approx 6894{,}7573 \qquad [6]$$

$$1\ psi \approx 6894{,}7573\ [Pa] \qquad [7]$$

<u>**Odpowiedź:**</u> 1 psi odpowiada w przybliżeniu 6894,7573 Pa.

Zadanie nr 5. (Edyta Żylińska, 22.12.2017)

Koń mechaniczny (KM) jest pozaukładową jednostką mocy, zdefiniowaną jako iloczyn siły 75 kG i prędkości 1 m/s. Kilogram siła (kG lub kgf) jest to siła, z jaką Ziemia przyciąga masę 1 kg w miejscu, w którym przyspieszenie ziemskie wynosi 9,80665 m/s^2. Obliczyć, ilu watom odpowiada 1 KM.

Dane

$KM = 75\ kG * 1\frac{m}{s}$

$1\ kG = 1\ kg * g$

$g\ \approx 9{,}80665\ \frac{m}{s^2}$

$1\ W = \frac{1\ J}{1\ s} = \frac{1\ kg * m^2}{s^3}$

gdzie:

W – wat

g – przyspieszenie ziemskie

m – metr

s – sekunda

J – dżul

Szukane:

$1\ KM = x\ [W]$

Wzór:

1 KM = $75 * 1kG * 1\frac{m}{s}$

Rozwiązanie:

Wzór:

$$1\ KM = 75 * 1kG * 1\frac{m}{s} \qquad [1]$$

1 koń mechaniczny jest zdefiniowany jako iloczyn siły $75\ kG$ i prędkości $1\frac{m}{s}$. $1\ kG$ (kilogram siła) jest to siła, z jaką Ziemia przyciąga masę $1\ kg$ w miejscu, w którym przyspieszenie ziemskie wynosi $9{,}80665\ \frac{m}{s^2}$. Zatem, aby rozwiązać powyższe zadanie, należy sobie odpowiedzieć na pytanie *czym jest siła* (ogólnie). Otóż siła, jest to wektorowa wielkość fizyczna, która przyjmuje wartość 1 N, jeżeli nadaje ciału o masie 1 kg przyspieszenie równe $1\frac{m}{s^2}$. Znając wartość masy i przyspieszenia, możemy więc obliczyć wartość siły.

W tym przypadku naszą masą jest $1\ kg$, a przyspieszeniem jest przyspieszenie ziemskie.

W związku z tym do wzoru [1] w miejsce 1 kG należy postawić iloczyn przyspieszenia ziemskiego (g) i 1 kilograma.

Stąd:

$$1\ KM = 75 * 1\ kG * 1\frac{m}{s} = 75 * (1kg * g) * 1\frac{m}{s} = 75 * (1\ kg * 9{,}80665\ \frac{m}{s^2}) * 1\frac{m}{s} \approx \approx$$

$$75 * 9{,}80665\ kg * \frac{m^2}{s^3} \approx 735{,}49875\ W \qquad [2]$$

Czyli:

$$x\ \approx 735{,}49875 \qquad [3]$$

$$1\ KM \approx 735{,}49875\ W \qquad [4]$$

<u>Odpowiedź:</u> 1 KM odpowiada w przybliżeniu 735,49875 W.

Zadanie nr 10 (Edyta Żylińska, 15.12.2017)

W wyniku czterokrotnego powtórzenia pomiaru otrzymano następujące wyniki: 123, 141, 132, 136. Oblicz średnią arytmetyczną, niepewność standardową pojedynczego pomiaru i niepewność standardową średniej arytmetycznej.

Dane:	**Szukane:**	**Wzory:**
$x_1 = 123$	$\bar{x}$ - średnia arytmetyczna	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
$x_2 = 141$	$u(x)$ - niepewność standardowa	$u(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{(n-1)}}$
$x_3 = 132$	pojedynczego pomiaru	$u(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}$
$x_4 = 136$	$u(\bar{x})$ - niepewność standardowa średniej arytmetycznej	

Rozwiązanie:

a) Średnia arytmetyczna:

Średnią arytmetyczną obliczamy dzieląc sumę pomiarów $(x_1 + x_2 + \ ... + x_n)$ przez ich ilość n.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{4}(123 + 141 + 132 + 136) = \frac{532}{4} = 133 \qquad [1]$$

b) Niepewność standardowa pojedynczego pomiaru:

Niepewność standardowa pojedynczego pomiaru wyrażana jest za pomocą odchylenia standardowego σ dla pojedynczego pomiaru. Jest to miara średniego rozrzutu wyników pomiarów wokół prawdziwej wartości mierzonej wielkości.

$$u(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{(n-1)}} = \sqrt{\frac{(123-133)^2+(141-133)^2+(132-133)^2+(136-133)^2}{(4-1)}} = \sqrt{\frac{10^2+8^2+1^2+3^2}{3}} =$$
$$\sqrt{\frac{100+64+1+9}{3}} = \sqrt{\frac{174}{3}} = \sqrt{58} \approx 7{,}62 \qquad [2]$$

c) Niepewność standardowa średniej arytmetycznej:

$$u(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{(123-133)^2+(141-133)^2+(132-133)^2+(136-133)^2}{4(4-1)}} = \sqrt{\frac{10^2+8^2+1^2+3^2}{4*3}} =$$
$$\sqrt{\frac{100+64+1+9}{12}} = \sqrt{\frac{174}{12}} = \sqrt{14{,}5} \approx 3{,}81 \qquad [3]$$

Odchylenie standardowe średniej arytmetycznej jest mniejsze niż odchylenie standardowe dla pojedynczego pomiaru. Stanowi to dowód, że średnia $\bar{x}$ chociaż, tak jak wynik pojedynczego pomiaru, nie jest równa wartości rzeczywistej, to jednak leży ona bliżej wartości prawdziwej niż pojedynczy pomiar.

Odpowiedź: Dla serii pomiarów: 123, 141, 132, 136 średnia arytmetyczna jest równa 133. Oszacowana niepewność standardowa dla pojedynczego pomiaru wynosi w przybliżeniu 7,62 a niepewność standardowa średniej arytmetycznej w przybliżeniu 3,81.

Dodatek.

1. Jeżeli wyniki poszczególnych pomiarów tej samej wielkości różnią się, a błędy pomiarowe są *losowe* (rozkład normalny), wówczas niepewność standardową obliczamy metodą typu A.

Wzór:

$$u_A(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \qquad [4]$$

2. Jeżeli prawdopodobieństwo uzyskania wyniku mieszczącego się w przedziale wyznaczonym przez wynik i niepewność wzorcowania jest stałe (rozkład jednostajny), wówczas niepewność standardową obliczamy metodą typu B. Metodę tę stosujemy również w sytuacji gdy wyniki pomiarów są jednakowe lub gdy pomiar jest przeprowadzany tylko raz.

Wzór:

$$u_B(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} \qquad [5]$$

gdzie:

Δx – niepewność maksymalna wielkości x.

Do określenia niepewności maksymalnej wielkości x zazwyczaj wykorzystuje się działkę elementarną przyrządu lub informację o niepewności maksymalnej określonej przez producenta przyrządu pomiarowego.

Zadanie nr 14. (Edyta Żylińska, 22.12.2017)

W celu wyznaczenia powierzchni stołu o kształcie prostokąta wykonano pomiary długości jego boków i otrzymano następujące rezultaty: długość boku pierwszego a = 103 cm, u(a) = 2 cm, długość drugiego boku b = 212 cm, u(b) = 5 cm. Oblicz powierzchnię tego stołu i niepewność wyznaczonej powierzchni.

Dane:

a = 103 cm

$u(a)$ = 2 cm

Szukane:

P – pole powierzchni stołu

$u_c(y)$ - niepewność wyznaczonego

b = 212 cm pola powierzchni

$u(b)$ = 5 cm

Wzory:

$P = a * b$

$y = f(a, b) = a * b$

$u_c(y) = a * b\sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2}$

Rozwiązanie:

Pole powierzchni *P* stołu o kształcie prostokąta wyznaczymy z podstawowego wzoru na pole prostokąta. Jest to iloczyn boku krótszego (a) i dłuższego (b).

$$P = a * b = 103\ cm * 212\ cm = 21\ 836\ cm^2 \quad [1]$$

Niepewność obliczonego pola powierzchni $u_c(x)$ możemy obliczyć za pomocą wzoru na niepewność standardową pomiarów pośrednich (niepewność złożoną bezwzględną).

W sytuacji gdy naszym zadaniem jest wyznaczenie pewnej wielkości, która jest funkcją innych wielkości mierzonych, np. pole powierzchni na podstawie długości boku krótszego i dłuższego, musimy uwzględnić zależność funkcyjną wielkości wyznaczanej od wielkości mierzonych. Zależność tę można zapisać w ogólnej postaci: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, gdzie symbolami $x_1, x_2, \dots, x_k$ oznaczamy k wielkości fizycznych mierzonych bezpośrednio.

W przypadku pomiarów nieskolerowanych (niezależnych od siebie) niepewność standardową złożoną wielkości y szacujemy przy pomocy przybliżonego wzoru:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial f(x_j)}{\partial x_j}\right)^2 u^2(x_j)} \quad [2]$$

Wzory określające niepewności standardowe złożone u_c dla typowych zależności funkcyjnych, tj. dodawanie, odejmowanie, iloczyn, iloraz, potęgowanie, etc. obliczone na podstawie powyższego wzoru, są dostępne w literaturze naukowej.

Wzór ten dla iloczynu ma się następująco:

$$u_c(y) = a * b * \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2} \quad [3]$$

Stąd:

$$u_c(21\,836\ cm^2) = a * b * \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2} = 103\ cm * 212\ cm\sqrt{\left(\frac{2\ cm}{103\ cm}\right)^2 + \left(\frac{5\ cm}{212\ cm}\right)^2}$$

$$= 21\,836\ \mathrm{cm}^2\sqrt{\frac{4\ cm^2}{10\,609\ cm^2} + \frac{25\ cm^2}{44\,944\ cm^2}} \approx 21\,836\ \mathrm{cm}^2\sqrt{0{,}000377 + 0{,}000556} \approx$$

$$\approx 21\,836\ \mathrm{cm}^2 * \sqrt{0{,}000933} \approx 21\,836\ \mathrm{cm}^2 * 0{,}0305 \approx 665{,}998\ cm^2 \qquad [4]$$

Odpowiedź: Pole powierzchni stołu w kształcie prostokąta o długości boków a = 103 cm, u(a) = 2 cm, i b = 212 cm, u(b) = 5 cm, wynosi 21 836 cm^2. Niepewność pomiarowa u_c wyznaczonej powierzchni jest równa w przybliżeniu 665,998 cm^2.

Zadanie 19. (Hubert Urbański, 22.12.2017)

Ciało o masie m ma prędkość v. Stosując analizę wymiarową otrzymać równanie na energię kinetyczną tego ciała.

Dane:

m

v

Szukane:

E_k = ?

Rozwiązanie:

Każdą zależność funkcyjną (nieznaną) można zapisać jako funkcję kilku parametrów fizycznych (niezależnych, np. średnica, czas itp.), z których każdy posiada swój wymiar (w układzie SI będzie to np. metr lub sekunda. Dla naszego przypadku (energia kinetyczna) można wyrazić jako funkcję masy ciała (*m*) oraz prędkości tego ciała (*v*).

$$E_k = f(m, v)$$

Założone parametry mają następujące wymiary:

$$[m] = M, [v] = \frac{S}{t}, [S] = L, [t] = T, [v] = L \cdot T^{-1}$$

Taką funkcję można wyrazić w postaci potęgowej:

$$E_k = c \cdot M^{\alpha} \cdot L^{\beta} \cdot T^{\gamma}$$

Zgodnie z zasadą zgodności wymiarowej, wymiar po lewej stronie równania musi równać się wymiarowi po prawej stronie równania. Jako, że wymiarem energii kinetycznej jest $\frac{M \cdot L^2}{T^2} = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$, równanie przyjmuje postać:

$$M \cdot L^2 \cdot T^{-2} = c \cdot M^{\alpha} \cdot L^{\beta} \cdot T^{\gamma}$$

Z porównania wykładników wymiarów po lewej oraz prawej stronie równania powstaje układ trzech równań:

Dla M, L,T $\left\{\begin{matrix} 1 = \alpha \\ 2 = \beta \\ -2 = \gamma \end{matrix}\right\}$

Ostateczna postać wzoru:

$$E_k = c \cdot M^{\alpha} \cdot L^{\beta} \cdot T^{\beta} = c \cdot M^1 \cdot L^2 \cdot T^{-2}$$

$$\underline{\boldsymbol{E_k = c \cdot m \cdot v^2}}$$

Odpowiedź: Po zastosowaniu analizy wymiarowej otrzymaliśmy równanie na energię kinetyczną równe: $\underline{\boldsymbol{E_k = c \cdot m \cdot v^2}}$

Zadanie nr 20 (Edyta Żylińska, 22.12.2017)

Ciało zostało rzucone pionowo do góry. Stosując analizę wymiarową otrzymać równanie na maksymalną wysokość wzniesienia się tego ciała.

Rozwiązanie:

Analiza wymiarowa jest narzędziem opartym na teorii podobieństwa, stosowanym do wyznaczania warunków podobieństwa dynamicznego poprzez analizę wielkości fizycznych charakteryzujących dane zjawisko.
Każdą zależność funkcyjną można zapisać jako funkcję kilku niezależnych parametrów fizycznych, z których każdy posiada swój wymiar. Wymiary występujące przy odpowiednich jednostkach miar po lewej i po prawej stronie danej równości muszą być takie same.

Rozwiązywanie zadań metodą analizy wymiarowej można podzielić na kilka głównych etapów.

Etap I:

Należy sobie odpowiedzieć na pytanie: *Co chcemy znaleźć?* Następnie wypisać wielkości fizyczne od których (naszym zdaniem) może zależeć szukana wielkość.

W naszym przypadku, szukaną wielkością jest maksymalna wysokość wzniesienia ciała rzuconego pionowo do góry. Oznaczmy ją literą H. Wielkościami od których może ona zależeć to (intuicyjnie): masa (m), prędkość (V_0) oraz przyspieszenie ziemskie (g). Wobec tego równanie będzie miało postać:

$$H = f(V_0, m, g) \tag{1}$$

Mamy więc cztery wielkości, pomiędzy którymi szukamy związku (H, V_0, m, g) oraz cztery jednostki miar, przez które się one wyrażają (m, $\frac{m}{s}$, kg, $\frac{m}{s^2}$).

Etap II:

Postulujemy równanie wiążące te cztery wielkości.

$$H = C * V_0^{\alpha} * m^{\beta} * g^{\gamma} \tag{2}$$

C jest liczbą, której wartości nie jesteśmy w stanie wyznaczyć. Postulujemy jednak, że wartość C jest zbliżona do liczby 1 (na podstawie analizy wielu przykładów).

Etap III:

Równanie [2] zapisujemy analogicznie dla jednostek miar.

$$m = \left(\frac{m}{s}\right)^{\alpha} * (kg)^{\beta} * \left(\frac{m}{s^2}\right)^{\gamma} \tag{3}$$

stąd:

$$m^1 * kg^0 * s^0 = m^{\alpha+\gamma} * kg^{\beta} * s^{-\alpha-2\gamma} \tag{4}$$

Równanie [4] jest równoważne trzem równaniom, zapisanym oddzielnie dla każdej jednostki. Równania te wynikają z przyrównania wykładników potęgowych przy odpowiednich jednostkach miar.

m: $1 = \alpha + \gamma$ [5]
kg: $0 = \beta$ [6]
s: $0 = -\alpha - 2\gamma$ [7]

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy:

$\gamma = -1$ [8]
$\alpha = 2$ [9]
$\beta = 0$ [10]

W tym momencie możemy zauważyć, że maksymalna wysokość wzniesienia nie zależy od masy ciała, gdyż $\beta = 0$.

Etap IV:

Wracamy do etapu II, podstawiamy otrzymane wyniki do równania [2].

$$H = C * V_0^2 * m^0 * g^{-1} \tag{11}$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$H = C * \frac{V_0^2}{g}$ [12]

Jest to szukane równanie wyrażające maksymalną wysokość ciała rzuconego pionowo do góry.

<u>Odpowiedź:</u> Równanie na maksymalną wysokość ciała rzuconego pionowo do góry, wyznaczone za pomocą analizy wymiarowej ma postać: $H = C * \frac{V_0^2}{g}$.

Zadanie 21. (Mateusz Rybka, 29.12.2017)

Stosując analizę wymiarową otrzymać wzór na okres drgań kuleczki o masie m wiszącej na sprężynie o stałej k.

Dane:	**Szukane:**
k	T=?
m	

Rozwiązanie:

Stosując metodę analizy wymiarowej do rozwiązania zadania zakładamy, że wymiary występujące przy odpowiednich podstawowych jednostkach miar po lewej i prawej stronie równania są takie same,

Etap I:

Określamy od jakich wielkości fizycznych może zależeć wyznaczana wielkość. Dla naszego przypadku określam okres wahadła sprężynowego jako funkcję stałej sprężystości sprężyny k oraz masy kulki m(1.1)

$$(1.1) \quad P = f(m, k)$$

Następnie by móc zastosować analizę wymiarową wyrażam wymiary jednostek z pomocą podstawowych jednostek układu SI (1.2)

$$(1.2\ )\ k = [\frac{N}{m} = \frac{kg \cdot \frac{m}{s^2}}{m} = \frac{kg}{s^2}]$$

Etap II:

Postuluję ogólny kształt równania wiążącego te wielkości (2.1)

$$(2.1)\, T = c \cdot m^{\alpha} \cdot k^{\beta}$$

Stała c jest liczbą, ponieważ nie jesteśmy w stanie wyznaczyć jej z pomocą analizy wymiarowej przyjmujemy do dalszych obliczeń c = 1. Równanie (2.1) zapisujemy dla jednostek miar w następujący sposób (2.2)

$$(2.2)\; T = c \cdot M^{\alpha} \cdot (M \cdot T^{-2})^{\beta}$$

Przykładowo za człon $(M \cdot T^{-2})^{\beta}$odpowiada stała k o jednostce $[kg \cdot s^{-2}]$. W ten sposób przedstawiamy wszystkie dane które wyrażone są jako złożenie kilku jednostek podstawowych. Następnie przyrównuję wykładniki potęg przy tych samych wielkościach fizycznych po obu stronach równania tworząc układ równań (2.3)

$$\begin{aligned} T&: 1 = -2\beta \\ M&: 0 = \alpha + \beta \end{aligned} \tag{2.3}$$

Etap III:

Rozwiązuję układ równań (2.3):

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad \beta = -\frac{1}{2}$$

Podstawiam α i β do równania (2.1), otrzymuję ostateczne równanie opisujące zależność okresu wahadła sprężynowego od masy na nim zawieszonej i stałej sprężystości sprężyny(3.1)

$$(3.1)\; T = c \cdot m^{\frac{1}{2}} \cdot k^{-\frac{1}{2}} = c \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Odpowiedź: Stosując analizę wymiarową otrzymaliśmy równanie $T = c \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$ określające zależność między okresem wahadła sprężynowego a masą na nim zawieszoną i stałą sprężystości sprężyny.

Zadanie 22. (Mateusz Rybka, 29.12.2017)

Stosując analizę wymiarową oszacować wartość ciśnienia panującego w centrum Słońca. Masa Słońca M = $2 \cdot 10^{30}$ kg, promień Słońca R = $7 \cdot 10^{8}$ m.

Dane: **Szukane:**

M= $2 \cdot 10^{30}$ kg p=?

R = $7 \cdot 10^{8}$ m

Rozwiązanie:

Stosując metodę analizy wymiarowej do rozwiązania zadania zakładamy, że wymiary występujące przy odpowiednich podstawowych jednostkach miar po lewej i prawej stronie równania są takie same,

Etap I:

Określamy od jakich wielkości fizycznych może zależeć wyznaczana wielkość. Dla naszego przypadku określam ciśnienie panujące w centrum słońca jako funkcję jego masy i promienia. (1.1)

$$(1.2) \quad p = f(M, R)$$

Następnie by móc zastosować analizę wymiarową wyznaczam wymiary jednostek z pomocą podstawowych jednostek układu SI (1.2)

$$(1.2\ )\ p = [Pa = \frac{N}{m^2} = \frac{kg \cdot \frac{m}{s^2}}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s^2}]$$

Etap II:

Postuluję ogólny kształt równania wiążącego te wielkości (2.1)

$$(\ 2.1\ ) p = c \cdot M^{\alpha} \cdot R^{\beta}$$

Stała c jest liczbą, ponieważ nie jesteśmy w stanie wyznaczyć jej z pomocą analizy wymiarowej przyjmujemy do dalszych obliczeń c = 1. Równanie (2.1) zapisujemy dla jednostek miar w następujący sposób (2.2)

$$(2.2)\ M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} = M^{\alpha} \cdot L^{\beta}$$

Ponieważ przy przyjętym równaniu czas występuje jedynie po lewej stronie równania musi istnieć czynnik którego nie uwzględniliśmy dotychczas. Zakładam że ciśnienie w centrum ciała niebieskiego zależy także od jego wartości jego przyśpieszenia grawitacyjnego a.(2.3.1)(2.3.2)

$$(2.3.1)\ p = f(M, R, a)$$

$$(2.3.2)\ p = c \cdot M^{\alpha} \cdot R^{\beta} \cdot a^{\gamma}$$

Ponownie postuluję ogólny kształt równania. (2.4)

$$(2.4)\ M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} = M^{\alpha} \cdot L^{\beta} \cdot (L \cdot T^{-2})^{\gamma}$$

Następnie przyrównuję wykładniki potęg przy tych samych wielkościach fizycznych po obu stronach równania tworząc układ równań (2.5)

$$\begin{aligned} &M: 1 = \alpha \\ &L: -1 = \beta + \gamma \\ &T: -2 = -2\gamma \end{aligned} \tag{2.5}$$

Etap III:

Rozwiązuję układ równań (2.5):

$$\alpha = 1 \qquad \beta = -2 \qquad \gamma = 1$$

Podstawiam α, β i γ do równania (2.3.2), otrzymuję ostateczne równanie opisujące ciśnienie panujące w centrum słońca (3.1)

$$(3.1)\ p = c \cdot M \cdot R^{-2} \cdot a = c\frac{Ma}{R^2}$$

Podstawiam wartości do równania ($a = G\frac{M}{R^2} = 6{,}6740831 \ \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2 \cdot 10^{30}}{7^2 \cdot 10^{8^2}} = 272{,}41\ [\frac{m}{s^2}]$)

$$p = c\frac{2 \cdot 10^{30} \cdot 272{,}41}{(7 \cdot 10^8)^2} = c \cdot 1{,}112 \cdot 10^{15}\ [Pa]$$

Odpowiedź: Szacowane z pomocą metody analizy wymiarowej ciśnienie w centrum słońca wynosi $p = c \cdot 1{,}112 \cdot 10^{15}\ [Pa]$, przyjmując wartość ciśnienia w jądrze Słońca podaną przez Polskie Towarzystwo Astronomiczne : $p_s = 2{,}334 \cdot 10^{17} [Pa]$.

Zadanie 23. (Mateusz Rybka, 29.12.2017)

Wiatrak mający skrzydła o średnicy D znajduje się w strumieniu powietrza o gęstości ρ, wiejącego z prędkość v względem niego. Otrzymać równanie na maksymalną moc energii, którą można uzyskać z tego wiatraka. Obliczenia wykonać dla D = 40 m, v = 10 m/s, ρ = 1,4 kg/m^3

Dane:	**Szukane:**
D = 40 m	P=?
v = 10 m/s	
ρ = 1,4 kg/m^3	

Rozwiązanie:

Stosując metodę analizy wymiarowej do rozwiązania zadania zakładamy, że wymiary występujące przy odpowiednich podstawowych jednostkach miar po lewej i prawej stronie równania są takie same,

Etap I:

Określamy od jakich wielkości fizycznych może zależeć wyznaczana wielkość. Dla naszego przypadku określam maksymalną moc energii wiatraka jako funkcję jego średnicy, prędkości wiatru oraz gęstości strumienia powietrza. (1.1)

$$P = f(D, v, \rho) \qquad (1.1)$$

Następnie by móc zastosować analizę wymiarową wyznaczam wymiary jednostek z pomocą podstawowych jednostek układu SI (1.2)

$$P = [W = \frac{J}{s} = \frac{N \cdot m}{s} = \frac{kg \cdot \frac{m^2}{s^2}}{s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3}] \qquad (1.2)$$

Etap II:

Postuluję ogólny kształt równania wiążącego te wielkości (2.1)

$$P = c \cdot D^{\alpha} \cdot v^{\beta} \cdot \rho^{\gamma} \qquad (2.1)$$

Stała c jest liczbą, ponieważ nie jesteśmy w stanie wyznaczyć jej z pomocą analizy wymiarowej przyjmujemy do dalszych obliczeń c = 1. Równanie (2.1) zapisujemy dla jednostek miar w następujący sposób (2.2)

$$M \cdot L^2 \cdot T^{-3} = c \cdot L^{\alpha} \cdot (L \cdot T^{-1})^{\beta} \cdot (M \cdot L^{-3})^{\gamma} \qquad (2.2)$$

Przykładowo za człon $(L \cdot T^{-1})^{\beta}$ odpowiada prędkość v o jednostce $[m \cdot s^{-1}]$, człon odnośnie gęstości zapisujemy tą samą metodą. Następnie przyrównuję wykładniki potęg przy tych samych wielkościach fizycznych po obu stronach równania tworząc układ równań (2.3)

$$\begin{aligned} T&: -3 = -\beta \\ M&: 1 = \gamma \\ L&: 2 = \alpha + \beta - 3\gamma \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Etap III:

Rozwiązuję układ równań (2.3):

$$\alpha = 2 \qquad \beta = 3 \qquad \gamma = 1$$

Podstawiam α, β i γ do równania (2.1), otrzymuję ostateczne równanie opisujące maksymalną moc wiatraka w strumieniu powietrza o danej prędkości. (3.1)

$$P = c \cdot D^2 \cdot v^3 \cdot \rho^1 \qquad (3.1)$$

Obliczam maksymalna moc wiatraka dla podanych danych:

$$P = c \cdot 1{,}4 \cdot 40^2 \cdot 10^3 = c \cdot 2{,}24 \cdot 10^6\ [W] = c \cdot 2{,}24\ [MW]$$

Odpowiedź: Dzięki zastosowaniu analizy wymiarowej otrzymaliśmy równanie określające zależność maksymalnej mocy wiatraka od średnicy jego skrzydeł, gęstości strumienia powietrza oraz prędkości wiatru.$P = c \cdot D^2 \cdot v^3 \cdot \rho$ dla danych wartości oszacowano maksymalną moc teoretyczną : $P = c \cdot 2{,}24 \cdot 10^6\ [W] = c \cdot 2{,}24\ [MW]$

Zadanie nr 24 (Edyta Żylińska, 29.12.2017)

Stosując metodę analizy wymiarowej wyprowadź wzór na przyśpieszenie dośrodkowe ciała poruszającego się po okręgu o promieniu R ze stałą szybkością v.

Rozwiązanie:

Rozwiązywanie zadań metodą analizy wymiarowej można podzielić na kilka głównych etapów.

Etap I:
Szukamy wielkości od których (przypuszczalnie) może zależeć wielkość, dla której chcemy wyprowadzić wzór.

Wielkością dla której chcemy wyprowadzić wzór jest przyspieszenie dośrodkowe $a_{dośr}$ ciała poruszającego się po okręgu o promieniu R ze stałą szybkością v. Wobec tego oczywiste jest, że we wzorze pojawi się promień R oraz szybkość v. Intuicyjnie zakładam, że przyspieszenie może zależeć również od masy m.

Zależność funkcyjna wspomnianych wielkości będzie miała następującą postać:

$$a_{dośr} = f(v, R, m) \qquad [1]$$

Mamy więc cztery wielkości, pomiędzy którymi szukamy związku $(a_{dośr}, v, R, m)$ oraz cztery jednostki miar, przez które się one wyrażają ($\frac{m}{s^2}, \frac{m}{s}, m, kg$).

Etap II:

Postulujemy równanie wiążące te cztery wielkości.

$$a_{dośr} = C * v^{\alpha} * R^{\beta} * m^{\gamma} \qquad [2]$$

C jest liczbą, której wartości nie jesteśmy w stanie wyznaczyć. Postulujemy jednak, że wartość C jest zbliżona do liczby 1.

Etap III:

Równanie [2] zapisujemy analogicznie dla jednostek miar.

$$\left(\frac{m}{s^2}\right) = \left(\frac{m}{s}\right)^{\alpha} * (m)^{\beta} * (kg)^{\gamma} \qquad [3]$$

stąd:

$$m^1 * s^{-2} * kg^0 = m^{\beta+\alpha} * s^{-\alpha} * kg^{\gamma} \qquad [4]$$

Równanie [4] jest równoważne trzem równaniom, zapisanym oddzielnie dla każdej jednostki. Równania te wynikają z przyrównania wykładników potęgowych przy odpowiednich jednostkach miar.

$$m: \quad 1 = \beta + \alpha \qquad [5]$$
$$s: \quad -2 = -\alpha \qquad [6]$$

kg: $0 = \gamma$ [7]

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy:

$\alpha = 2$ [8]
$\beta = -1$ [9]
$\gamma = 0$ [10]

W tym momencie możemy zauważyć, że przyspieszenie dośrodkowe ciała poruszającego się po okręgu nie zależy od masy ciała, gdyż $\gamma = 0$.

Etap IV:

Wracamy do etapu II, podstawiamy otrzymane wyniki do równania [2].

$$a_{dośr} = C * v^2 * R^{-1} * m^0 \quad [11]$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$a_{dośr} = C * \frac{v^2}{R} \quad [12]$$

Jest to szukany wzór na przyśpieszenie dośrodkowe ciała poruszającego się po okręgu o promieniu R ze stałą szybkością v.

Odpowiedź: Wzór na przyśpieszenie dośrodkowe ciała poruszającego się po okręgu o promieniu R ze stałą szybkością v wyprowadzony za pomocą analizy wymiarowej ma postać: $a_{dośr} = C * \frac{v^2}{R}$.

Zadanie nr 25. (Edyta Żylińska, 05.01.2018)

Stosując analizę wymiarową otrzymać wzór na prędkość powierzchniowych fal kapilarnych.

Rozwiązanie:

Etap I:

Prędkość powierzchniowych fal kapilarnych zależy od parametrów charakteryzujących wodę i fale, tj. długość fali λ, gęstość wody ρ oraz współczynnika napięcia powierzchniowego σ.

Wobec tego:

$$v = f(\lambda, \rho, \sigma) \quad [1]$$

Mamy więc cztery wielkości $(v, \lambda, \rho, \sigma)$ pomiędzy którymi szukamy związku. Jednostki miar przez które się one wyrażają to:

$v \left[\frac{m}{s}\right]$
$\lambda \ [m]$

$\rho \ \left[\frac{kg}{m^3}\right]$

$\sigma \ \left[\frac{kg}{s^2}\right]$

Etap II:
Postulujemy równanie wiążące te cztery wielkości:

$$v = C * \lambda^{\alpha} * \rho^{\beta} * \sigma^{\gamma} \quad [2]$$

C jest liczbą, której wartości nie jesteśmy w stanie wyznaczyć. Możemy jednak przyjąć, że wartość C jest zbliżona do liczby jeden (na podstawie analizy wielu zadań rozwiązanych metodą analizy wymiarowej).

Etap III:
Równanie [2] zapisujemy analogicznie dla jednostek miar.

$$\frac{m}{s} = (m)^{\alpha} * \left(\frac{kg}{m^3}\right)^{\beta} * \left(\frac{kg}{s^2}\right)^{\gamma} \quad [3]$$

stąd:

$$m^1 * s^{-1} * kg^0 = m^{\alpha - 3\beta} * s^{-2\gamma} * kg^{\beta + \gamma} \quad [4]$$

Wymiar po lewej stronie równania musi być równy wymiarowi po prawej stronie równania. Możemy więc sformułować trzy równania wynikające z przyrównania wykładników potęgowych przy odpowiednich jednostkach miar.

$$m: \quad 1 = \alpha - 3\beta \quad [5]$$
$$s: \ -1 = -2\gamma \quad [6]$$
$$kg: \ \ 0 = \beta + \gamma \quad [7]$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymamy:

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad [8]$$

$$\beta = -\frac{1}{2} \quad [9]$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \quad [10]$$

Etap IV:
Wracamy do etapu II, podstawiamy otrzymane wyniki do równania [2].

$$v = C * \lambda^{-\frac{1}{2}} * \rho^{-\frac{1}{2}} * \sigma^{\frac{1}{2}} \quad [11]$$

Po przekształceniu otrzymujemy ostateczny wzór na prędkość powierzchniowych fal kapilarnych:

$$v = C * \sqrt{\frac{\sigma}{\lambda * \rho}} \quad [12]$$

Odpowiedź: Wzór na prędkość powierzchniowych fal kapilarnych wyznaczony przy pomocy analizy wymiarowej ma postać: $v = C * \sqrt{\frac{\sigma}{\lambda * \rho}}$.

Zadanie 26. (Edyta Żylińska, 05.01.2018)

Stosując analizę wymiarową wyprowadzić wzór na prędkość powierzchniowych fal grawitacyjnych.

Rozwiązanie:

Etap I:
Metoda analizy wymiarowej opiera się na założeniu, że wymiary występujące po lewej stronie równania muszą być równe wymiarom znajdującym się po prawej stronie równania. Aby wyznaczyć wzór na określoną wielkość fizyczną, w pierwszej kolejności zakładamy od jakich parametrów wielkość ta może zależeć (niekoniecznie musimy mieć rację).

Załóżmy, że prędkość powierzchniowych fal grawitacyjnych może zależeć od przyspieszenia grawitacyjnego g oraz od długości fali λ.

Wobec tego:

$$v = f(\lambda, g) \qquad [1]$$

v, λ, g są trzema wielkościami pomiędzy którymi musimy znaleźć związek. Jednostki miar przez które się one wyrażają to:

$v \left[\frac{m}{s}\right]$

$\lambda \ [m]$

$g \left[\frac{m}{s^2}\right]$

Etap II:
Postulujemy równanie wiążące te cztery wielkości:

$$v = C * \lambda^{\alpha} * g^{\beta} \qquad [2]$$

C jest liczbą, której wartości nie jesteśmy w stanie wyznaczyć. Możemy jednak przyjąć, że wartość C jest zbliżona do liczby jeden (na podstawie analizy wielu zadań rozwiązanych metodą analizy wymiarowej).

Etap III:
Równanie [2] zapisujemy analogicznie dla jednostek miar.

$$\frac{m}{s} = (m)^{\alpha} * \left(\frac{m}{s^2}\right)^{\beta} \qquad [3]$$

stąd:

$$m^1 * s^{-1} = m^{\alpha+\beta} * s^{-2\beta} \tag{4}$$

Skoro wymiar po lewej stronie równania musi być równy wymiarowi po prawej stronie równania, możemy sformułować dwa równania wynikające z przyrównania wykładników potęgowych przy odpowiednich jednostkach miar.

$$m: \quad 1 = \alpha + \beta \tag{5}$$
$$s: \ -1 = -2\beta \tag{6}$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy:

$$\alpha = \frac{1}{2} \tag{7}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \tag{8}$$

Etap IV:
Wracamy do etapu II, podstawiamy otrzymane wyniki do równania [2].

$$v = C * \lambda^{\frac{1}{2}} * g^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

Po przekształceniu otrzymujemy ostateczny wzór na prędkość powierzchniowych fal grawitacyjnych:

$$v = C * \sqrt{\lambda * g} \tag{10}$$

<u>Odpowiedź:</u> Wzór na prędkość powierzchniowych fal grawitacyjnych wyznaczony przy pomocy analizy wymiarowej ma postać: $v = C * \sqrt{\lambda * g}$.

Zadanie 27. (Mateusz Rybka, 12.01.2018)

Bezwymiarowa wielkość zwana stałą Reynoldsa Re występuje wtedy, gdy rozważamy ruch ciała o rozmiarze L, poruszającego się z prędkością v w cieczy o gęstości ρ i współczynniku lepkości μ (jednostką współczynnika lepkości jest $kg/(m \cdot s)$). Otrzymać wyrażenie na stałą Re

Dane: **Szukane:**

v=$[{}^{m}/_{s}]$ R_e=?

L=[m]

$\rho = [{}^{kg}/_{m^3}]$

$\mu = [{}^{kg}/_{m \cdot s}]$

Rozwiązanie:

Stosując metodę analizy wymiarowej do rozwiązania zadania zakładamy, że wymiary występujące przy odpowiednich podstawowych jednostkach miar po lewej i prawej stronie równania są takie same. W tym wypadku stała Reynoldsa nie posiada wymiaru jednostki.

Etap I:

Określamy od jakich wielkości fizycznych może zależeć wyznaczana wielkość. Dla naszego przypadku określam stałą Reynoldsa jako funkcję długości ciała, prędkości ruchu ciała w cieczy, gęstości cieczy oraz współczynnika jej lepkości.(1.1)

(1.3) $$R_e = f(L, v, \rho, \mu)$$

Etap II:

Postuluję ogólny kształt równania wiążącego te wielkości (2.1)

(2.1) $$R_e = c \cdot L^{\alpha} \cdot v^{\beta} \cdot \rho^{\gamma} \cdot \mu^{\varphi}$$

Stała c jest liczbą, ponieważ nie jesteśmy w stanie wyznaczyć jej z pomocą analizy wymiarowej przyjmujemy do dalszych obliczeń c = 1. Równanie (2.1) zapisujemy dla jednostek miar w następujący sposób (2.2)

(2.2) $$L^0 \cdot T^0 \cdot M^0 = L^{\alpha \cdot}(L \cdot T^{-1})^{\beta} \cdot (M \cdot L^{-3})^{\gamma} \cdot (M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1})^{\varphi}$$

Uwaga: Litera L oznacza zarówno długość jak i jednostkę długości.

Przykładowo za człon $(M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1})^{\varphi}$odpowiada współczynnik lepkości cieczy o jednostce $\mu = [{}^{kg}/_{m} \cdot s]$. W ten sposób przedstawiamy wszystkie dane które wyrażone są jako złożenie kilku jednostek podstawowych. Następnie przyrównuję wykładniki potęg przy tych samych wielkościach fizycznych po obu stronach równania tworząc układ równań (2.3)

(2.3)
$$L: 0 = \alpha + \beta - 3\gamma - \varphi$$
$$T: 0 = \ -\beta - \varphi$$
$$M: 0 = \gamma + \varphi$$

Otrzymany układ ma trzy równania (trzy jednostki miar) oraz cztery niewiadome (cztery wykładniki potęg) oznacza to że bez dodatkowych czynności nie jesteśmy w stanie go policzyć.

By rozwiązać układ musimy poczynić założenie oparte na własnej wiedzy oraz intuicji. Należy wyznaczyć wykładnik jednej z wielkości. Zakładam że liczba Reynoldsa zależy wprost proporcjonalnie od długości przedmiotu poruszającego się w cieczy opisuje to założenie: (2.4)

(2.4)
$$\alpha = 1$$

W takim wypadku posiadam trzy równania i trzy niewiadome. Mogę rozwiązać układ równań. Należy jednak mieć na uwadze że od poprawności naszego założenia zależeć będzie poprawność wyniku końcowego.

Etap III:

Rozwiązuję układ równań (2.3):

$$\alpha = 1 \qquad \beta = 1 \qquad \gamma = 1 \qquad \varphi = -1$$

Podstawiam α, β, γ i φ do równania (2.1), otrzymuję ostateczne równanie opisujące zależność stałej Reynoldsa od długości ciała zanurzonego, jego prędkości ruchu, gęstości cieczy oraz współczynnika lepkości cieczy(3.1)

(3.1) $$R_e = c \cdot L \cdot v \cdot \rho \cdot \mu^{-1} = c\frac{L \cdot v \cdot \rho}{\mu}$$

Odpowiedź: Stosując analizę wymiarową otrzymaliśmy równanie $R_e = c\frac{L \cdot v \cdot \rho}{\mu}$ określające zależność między stałą Reynoldsa a długością ciała zanurzonego, jego prędkością ruchu w cieczy, gęstością cieczy i współczynnikiem lepkości cieczy.

★ ★ ★

Zadanie 28. (Mateusz Rybka, 12.01.2018)

Bezwymiarowa liczba Froude'a Fr odgrywa dużą rolę w hydrodynamice okrętowej w opisie oporu stawianego statkowi o długości L płynącemu z prędkością v i wytwarzającemu fale rozchodzące się w polu grawitacyjnym charakteryzowanym przyśpieszeniem g. Otrzymać równanie na liczbę Froude'a, zakładając że jest ona liniowa funkcją prędkości.

Dane:	**Szukane:**
v=$[{}^{m}/_{s}]$	F_r=?
L=[m]	
$g = [{}^{m}/_{s^2}]$	
$F_r \sim$ v	

Rozwiązanie:

Stosując metodę analizy wymiarowej do rozwiązania zadania zakładamy, że wymiary występujące przy odpowiednich podstawowych jednostkach miar po lewej i prawej stronie równania są takie same. W tym wypadku liczba Froude'a nie posiada wymiaru jednostki.

Etap I:

Określamy od jakich wielkości fizycznych może zależeć wyznaczana wielkość. Dla naszego przypadku określam liczbę Froude'a jako funkcję długości okrętu, prędkości ruchu kadłuba w cieczy oraz przyśpieszenia grawitacyjnego(1.1)

(1.1) $$F_r = f(L, v, g)$$

Etap II:

Postuluję ogólny kształt równania wiążącego te wielkości (2.1)

(2.1) $$F_r = c \cdot L^{\alpha} \cdot v^{\beta} \cdot g^{\gamma}$$

Stała c jest liczbą, ponieważ nie jesteśmy w stanie wyznaczyć jej z pomocą analizy wymiarowej przyjmujemy do dalszych obliczeń c = 1. Równanie (2.1) zapisujemy dla jednostek miar w następujący sposób (2.2)

(2.2) $$L^0 \cdot T^0 = L^{\alpha \cdot}(L \cdot T^{-1})^{\beta} \cdot (L \cdot T^{-2})^{\gamma}$$

Uwaga: Litera L oznacza zarówno długość jak i jednostkę długości.

Przykładowo za człon $(L \cdot T^{-1})^{\beta}$ odpowiada prędkość ruchu o jednostce $[{}^{m}/_{s}]$. W ten sposób przedstawiamy wszystkie dane które wyrażone są jako złożenie kilku jednostek podstawowych. Następnie przyrównuję wykładniki potęg przy tych samych wielkościach fizycznych po obu stronach równania tworząc układ równań (2.3)

(2.3) $$L: 0 = \alpha + \beta + \gamma$$
$$T: 0 = -\beta - 2\gamma$$

Otrzymany układ ma dwa równania (dwie jednostki miar) oraz trzy niewiadome (trzy wykładniki potęg) oznacza to że bez dodatkowych czynności nie jesteśmy w stanie go policzyć. W tym wypadku jednak w treści zadania dostajemy informację o założeniu - liczba Froude'a jest liniową funkcją prędkości kadłuba z tego warunku wyznaczamy jeden z wykładników. (2.4)

(2.4) $$F_r \sim v$$
$$\beta = 1$$

W takim wypadku posiadamy dwa równania i dwie niewiadome. Mogę rozwiązać układ równań.

Etap III:

Rozwiązuję układ równań (2.3):

$$\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \beta = 1 \qquad \gamma = -\frac{1}{2}$$

Podstawiam α, β i γ do równania (2.1), otrzymuję ostateczne równanie opisujące zależność liczby Froude'a od długości kadłuba, prędkości ruchu okrętu oraz przyśpieszenia grawitacyjnego (3.1)

(3.1) $$F_r = c \cdot L^{-\frac{1}{2}} \cdot v \cdot g^{-\frac{1}{2}} = c \cdot \frac{v}{\sqrt{L \cdot g}}$$

Odpowiedź: Stosując analizę wymiarową otrzymaliśmy równanie $F_r = c \cdot \frac{v}{\sqrt{L \cdot g}}$ określające zależność między liczbą Froude'a a długością kadłuba, prędkością ruchu okrętu oraz przyśpieszeniem grawitacyjnym.

Zadanie 35 (Wojciech Ferduła, 26.01.2018 r.)

Ciężarek o masie m = 2 kg zawieszony jest na nieważkiej nici, która nawinięta jest na walec o masie M = 10 kg i promieniu R = 20 cm. Opadający ciężarek rozkręca walec, Obliczyć: a) przyśpieszenie liniowe ciężarka, b) przyśpieszenie kątowe walca, c) siłę naciągu nici, d) prędkość kątową walca i prędkość liniową ciężarka po czasie t = 20 s od momentu rozpoczęcia ruchu.

Dane:

m = 2 kg

M = 10 kg

R = 20 cm = 0,2 m

t = 20 s

Szukane:

a = ?

ε = ?

F_s = ?

ω_2 = ?

v_2 = ?

Wzór:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \tag{1}$$

$$M_w = \vec{F_s} \circ \vec{R} * \sin\alpha \tag{2}$$

$$M_w = \varepsilon * I \tag{3}$$

$$\varepsilon = \frac{a}{R} \tag{4}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{5}$$

$$v = \omega * R \tag{6}$$

gdzie:

I – moment bezwładności walca

M – masa walca

R – promień walca

M_w – moment siły działającej na walec

F_s – siła naciągu nici

ε – przyspieszenie kątowe walca

a – przyspieszenie liniowe klocka

v – prędkość liniowa

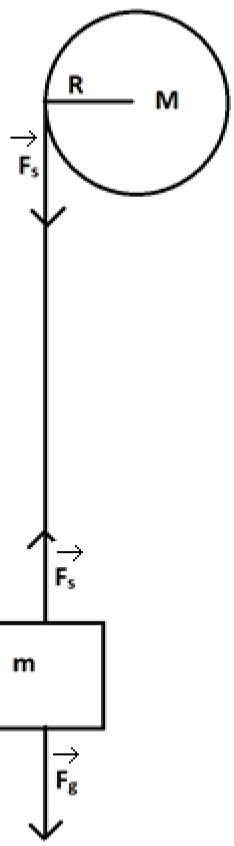
t – czas

Δ – przyrost wielkości

ω – prędkość kątowa walca

Rozwiązanie:

Klocek pod wpływem siły wypadkowej będącej różnicą sił ciężkości i naciągu nici zaczyna opadać. Siła naciągu nici natomiast napędza walec. Jedynym źródłem energii jest tu masa klocka. Wszystko przedstawiono na rysunku poniżej:



Dla dalszych rozważań użyjemy jedynie wartości wektorów.

Stąd:

$$F_g - F_s = m * a \rightarrow m * g - F_s = m * a \rightarrow F_s = m * g - m * a$$

(7)

Z równań (2) i (3):

$$F_s \circ R * \sin \alpha = \varepsilon \circ I$$

(8)

Po podstawieniu wzorów (1) i (4) oraz założeniu, że sinα=1, gdyż kąt między siłą naciągu nici i ramieniem działania R wynosi 90°:

$$F_s \circ R = \frac{a}{R} \circ \frac{1}{2} M R^2 \rightarrow F_s \circ R = \frac{1}{2} a \circ R M \rightarrow F_s = \frac{1}{2} a M$$

(9)

Za F_s podstawiam prawą stronę równania (7):

$$m*g-m*a=\frac{1}{2}aM \rightarrow mg=\frac{1}{2}aM+am \rightarrow mg=a(\frac{1}{2}M+m)$$

(10)

$$a=\frac{mg}{\frac{1}{2}M+m}=\frac{2kg*9{,}81\frac{m}{s^2}}{\frac{1}{2}*10kg+2kg}\approx 2{,}8\frac{m}{s^2}$$

(11)

Przeliczenie jednostek

$$\left[\frac{\cancel{kg}*\frac{m}{s^2}}{\cancel{kg}}=\frac{m}{s^2}\right]$$

Ze wzoru (4)

$$\varepsilon=\frac{2{,}8\frac{m}{s^2}}{0{,}2m}=14\frac{rad}{s^2}$$

(12)

Przeliczenie jednostek

$$\left[\frac{\frac{m}{s^2}}{m}=\frac{\cancel{m}}{s^2}*\frac{1}{\cancel{m}}=\frac{1}{s^2}=\frac{rad}{s^2}\right]$$

Ze wzoru (7):

$$F_s=m*g-m*a=2kg*9{,}81\frac{m}{s^2}-2kg*2{,}8\frac{m}{s^2}=14{,}02N$$

(13)

Przeliczenie jednostek

$$\left[kg*\frac{m}{s^2}-kg*\frac{m}{s^2}=N\right]$$

Ze wzoru (5) (v_0=0 i t_0=0):

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\rightarrow a=\frac{v_2}{t}\rightarrow v_2=at$$

(14)

$$v_2=at=2{,}8\frac{m}{s^2}*20s=56\frac{m}{s}$$

(15)

Przeliczenie jednostek:

$$\left[\frac{m}{s^{\cancel{2}}} * \cancel{s} = \frac{m}{s}\right]$$

Ze wzoru (6):

$$v = \omega * R \rightarrow \omega = \frac{v}{R}$$

(16)

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{56\frac{m}{s}}{0{,}2m} = 280\frac{rad}{s}$$

(17)

Przeliczenie jednostek:

$$\left[\frac{\frac{m}{s}}{m} = \frac{1}{s} = \frac{rad}{s}\right]$$

<u>Odpowiedź:</u> Przyspieszenie liniowe klocka wynosi 2,8 $\frac{m}{s^2}$, przyspieszenie kątowe walca wynosi 14 $\frac{rad}{s^2}$, siła naciągu nici wynosi 14,02 N, po czasie 20 s prędkość kątowa walca wynosi 280 $\frac{rad}{s}$, a prędkość liniowa klocka wynosi 56 $\frac{m}{s}$.

Zadanie nr 36 (Edyta Żylińska, 05.01.2018)

Pewien silnik samochodowy osiąga maksymalny moment obrotowy M = 500 N·m przy prędkości obrotowej ω = 2000 obrotów/min. Jaka jest wtedy moc tego silnika?

Rozwiązanie:

Dane:	**Szukane:**	**Wzór:**
$M = 500\ N * m$	$P = ?$	$P = M * f$
$\omega = 2000\ \frac{\text{obr}}{\text{min}}$		

gdzie:

f – prędkość kątowa $\left[\frac{rad}{s}\right]$

ω – prędkość obrotowa$\left[\frac{obr}{min}\right]$

$M -$ moment obrotowy $[N * m]$
$P -$ moc silnika $[W]$

Powyższe zagadnienie jest bardzo często wykorzystywane w praktyce, gdyż parametrem podstawowym silnika jest moment obrotowy, choć większość osób operuje mocą. Badając silnik na hamowni możemy zmierzyć jedynie moment obrotowy i prędkość obrotową. Dopiero na tej podstawie wyznacza się moc.

Moc, jest to wielkość skalarna określająca pracę wykonaną w jednostce czasu przez układ fizyczny. Z definicji, moc możemy określić wzorem:

$$P = \frac{W}{t} \qquad [1]$$

gdzie:

$P - moc$
$W -$ praca
$t -$ czas

Jednakże, znając moment obrotowy oraz obroty odpowiadające temu momentowi, do obliczenia mocy silnika możemy zastosować wzór przekształcony:

$$P = M * f \qquad [2]$$

gdzie:
$M -$ moment obrotowy
$f -$ prędkość kątowa

Z powyższego wzoru wynika, że aby obliczyć moc silnika, musimy najpierw znaleźć jego prędkość kątową f, oraz moment obrotowy M. Prędkość kątowa jest wielkością wektorową określającą kąt w radianach zakreślany w jednostce czasu. Prędkość kątowa jest ściśle związana z prędkością obrotową, której wartość została podana w treści zadania.

Wzór:

$$f = \frac{2\pi * \omega}{60} \qquad [3]$$

gdzie:
ω $-$ prędkość obrotowa $\left[\frac{obr}{min}\right]$

Wobec tego:

$$f = \frac{2\pi * \omega}{60} = \frac{2 * 3{,}14 * 2000}{60} = 209{,}33 \left[\frac{rad}{s}\right] \qquad [4]$$

Moment obrotowy jest wyrażony jako <u>iloczyn wektorowy</u> promienia wodzącego $\vec{r}$ o początku w punkcie O i końcu w punkcie przyłożenia <u>siły</u>, oraz siły $\vec{F}$. W przypadku silnika moment obrotowy mierzy się na wale korbowym.

Wzór:

$$\overrightarrow{M_o} = \vec{r} \text{ x } \vec{F} \qquad [5]$$

Wartość momentu obrotowego jest nam znana z treści zadania.

Znając wartość prędkości kątowej oraz wartość momentu obrotowego, możemy obliczyć moc silnika ze wzoru [2].

$$P = \ M * f = 500Nm * 209{,}33 \frac{rad}{s} = 104\ 665\ W = 104{,}665\ kW \qquad [6]$$

<u>Odpowiedź:</u> Moc silnika osiągającego moment obrotowy równy $M = 500\ N * m$ przy prędkości obrotowej $\omega = 2000\ \frac{\text{obr}}{\text{min}}$ jest równa $104{,}665\ kW$.

<u>Zadanie 37</u> (Wojciech Ferduła, 26.01.2018 r.)

Droga hamowania pewnego samochodu poruszającego się z prędkością v_1= 60 km/godz. wynosi s_1=15 m. Jaka będzie droga hamowania, gdy ten samochód porusza się z prędkością v_2= 120 km/godz?

<u>Dane:</u>

v_1 = 60 km/h

s_1 = 15 m

v_2 = 120 km/h

<u>Szukane:</u>

s_2 = ?

<u>Wzór:</u>

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

(7)

$$W_T = Ts\cos\alpha$$

(8)

Gdzie:

E_k – energia kinetyczna ciała

m – masa ciała

v – prędkość ciała

W_T – praca wykonana przez siłę tarcia na drodze hamowania

T – siła tarcia

α – kąt pomiędzy wektorem siły i przesunięcia

Rozwiązanie:

W obu przedstawionych sytuacjach samochód hamuje z zadanej prędkości. Praca siły tarcia na drodze hamowania jest równa energii kinetycznej w chwili początkowej. Zapiszmy równanie dla pierwszej sytuacji (hamowanie z prędkości 60 km/h)

$$E_{k_1} = W_{T_1}$$

(9)

Podstawiając ze wzoru (1) i (2) do wzoru (3):

$$\frac{mv_1^2}{2} = Ts_1\cos\alpha$$

(10)

Kąt α wynosi 0°, więc cosα wynosi 1, stąd:

$$\frac{mv_1^2}{2} = Ts_1$$

(11)

Masa i siła tarcia będą takie same dla obu sytuacji, więc należy przekształcić równanie (5) ze względu na stosunek tych wielkości mnożąc to równanie przez $\frac{2}{Tv_1^2}$:

$$\frac{m}{T} = \frac{2s_1}{v_1^2}$$

(12)

Podobnie jak w przypadku pierwszym, w drugim przypadku również praca siły tarcia będzie równa energii kinetycznej w chwili początkowej:

$$E_{k_2} = W_{T_2}$$

(7)

Podstawiając (1) i (2) do wzoru (7):

$$\frac{mv_2^2}{2} = Ts_2 \cos\alpha$$

(8)

Kąt α wynosi 0°, więc cosα wynosi 1, stąd:

$$\frac{mv_2^2}{2} = Ts_2$$

(9)

Równanie (9) należy przekształcić ze względu na s_2, mnożąc to równanie przez T:

$$s_2 = \frac{mv_2^2}{T2}$$

(10)

Z równania (6) podstawiam do równania (10) stosunek $\frac{m}{T}$:

$$s_2 = \frac{\cancel{2}s_1}{v_1^2} \cdot \frac{v_2^2}{\cancel{2}} = \frac{s_1 v_2^2}{v_1^2} = s_1 \cdot \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$$

(11)

Podstawienie (prędkość podstawiam w km/h, a nie w jednostkach podstawowych (m/s), gdyż w iloraz iloraz dwóch wielkości nie zależy od ich jednostki, jedynie należy pamiętać, by obie wartości przedstawione były w tych samych jednostkach:

$$s_2 = 15m \left(\frac{120\frac{km}{h}}{60\frac{km}{h}}\right)^2 = 60m$$

(12)

Przeliczenie jednostek

$$\left[m \cdot \frac{\frac{km}{h}}{\frac{km}{h}} = m \cdot \frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \cdot \frac{\cancel{h}}{\cancel{km}} = m\right]$$

(13)

<u>Odpowiedź:</u> Droga hamowania samochodu z prędkości 120 km/h będzie wynosić 60m.

Zadanie 41. (Mateusz Rybka, 19.01.2018)

Faza drgania harmonicznego w pewnej chwili czasu wynosi ϕ = 3 rad. Jaka będzie ta faza Δt = 5 s później, gdy częstotliwość drgań jest równa f = 0,1 Hz? [••]

Dane:

$f = 0{,}1\ [Hz]$

$\varphi(t_1) = 3\ [rad]$

$\Delta t = 5\ [s]$

Szukane:

$\varphi(t_1 + \Delta t) = ?$

Rozwiązanie:

By wyznaczyć fazę drgania harmonicznego skorzystamy z równania opisującego położenie drgającego punktu w zależności od czasu drgania. (1)

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (1)$$

Etap I:

Korzystając z wzoru (1) definiuję jego część odpowiedzialną za opisanie fazy drgania harmonicznego. (2)

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0 \qquad (2)$$

Część ta składa się z dwóch elementów – fazy początkowej drgania φ_0 która jest stała dla danego drgania harmonicznego i nie zmienia się w trakcie ruchu. Z tego względu na interesującą nas zmianę fazy drgania wpływać będzie jedynie wyrażenie $\omega_0 t$. A więc faza zależy od częstości kołowej drgań oraz od jego czasu.

Etap II:

Wyznaczam wartość częstości kołowej drgania korzystając ze wzoru : $\omega_0 = 2\pi \cdot f$ W treści zadania dostajemy informację o wartości częstotliwości f, jest ona stała i nie zależy od czasu. Obliczam ω_0: (3)

(3) $$\omega_0 = 2\pi \cdot 0{,}1 = 0{,}2\pi$$

Zapisuję wzór (2) podstawiając do niego obliczoną częstość kołową (3), otrzymujemy wzór (4)

(4) $$\varphi(t) = 0{,}2\pi \cdot t + \varphi_0$$

Etap III:

Tworzę układ równań (5) wykorzystując dane: $\varphi(t_1) = 3\ [rad]$. Ponieważ zarówno czas t_1 jak i faza początkowa φ_0 są niewiadomymi mogę przyjąć dla uproszczenia obliczeń $\varphi(t_0) = \varphi_0 = 0$. Operacja ta nie wpływa na zmianę fazy drgania w czasie. Jako drugie równanie wykorzystuję, równanie (4) za t podstawiając wyrażenie: $t_1 + \Delta t$.

(5) $$\varphi(t_1) = 0{,}2\pi \cdot t_1 = 3\ [rad]$$
$$\varphi(t_1 + \Delta t) = 0{,}2\pi \cdot (t_1 + \Delta t) = x$$

$$\varphi(t_1 + \Delta t) = 0{,}2\pi \cdot t_1 + 0{,}2\pi \cdot \Delta t = x$$
$$\varphi(t_1) = 0{,}2\pi \cdot t_1 = 3\ [rad]$$

$$\varphi(t_1 + \Delta t) = (0{,}2\pi \cdot t_1) + 0{,}2\pi \cdot \Delta t = x$$

$$\varphi(t_1 + \Delta t) = 3 + 0{,}2\pi \cdot 5 = 3 + \pi \cong 6{,}14\ [rad]$$

***Odpowiedź*:** Faza drgania harmonicznego po czasie $\Delta t = 5[s]$ osiągnie wartość około 6,14 radiana.

Zadanie nr 43. (Kornelia Suchorab 23.01.2018)

Ciało o masie m = 30 g zostało zawieszone na sprężynie o stałej k = 20 $\frac{N}{m}$. Jaki będzie okres małych drgań tej masy na tej sprężynie?

Dane: Szukane:

m = 30 g T = ?

k = 20 N/m

Rozwiązanie:

Przedstawione w zadaniu ciało o masie m zawieszone na sprężynie wykonuje poziome drgania swobodne spowodowane oddziaływaniem sprężyny o współczynniku sprężystości k.

Masa po zawieszeniu na sprężynie opada w dół do chwilowego zatrzymania się, następnie wędruje w górę itd. Przemieszczając się od położenia najwyższego do najniższego i z powrotem, masa wykonuje pełny cykl.

Parametrami charakteryzującymi drgania swobodne są: częstość kątowa ω i okres drgań T.

Okres drgań T, czyli czas, w którym masa wykona pełny cykl drgania, jest opisana równaniem (1)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1}$$

gdzie:

ω - częstość kątowa.

Częstość kątowa ω^2 drgań swobodnych przyjmuje natomiast postać (2), która określa stosunek dwu wielkości: siły sprężystości, która usiłuje przywrócić stan równowagi ciału drgającemu, i masy bezwładnej, która temu się sprzeciwia:

$$\omega^2 = \frac{kx}{mx} = \frac{k}{m} \tag{2}$$

gdzie:

k – stała sprężyny

m – masa [kg]

x – wychylenie względem położenia równowagi.

Po spierwiastkowaniu obu stron równania otrzymujemy (3)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3}$$

Podstawiając do wzoru (1) wzór (3) otrzymujemy (4)

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \tag{4}$$

a po przekształceniu (4) otrzymujemy (5)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{5}$$

Aby uzyskać zgodność co do jednostek należy zamienić

$$m = 30g = 0{,}03kg \tag{6}$$

Przyjmując, iż

$$\pi = 3{,}14 \tag{7}$$

Podstawiamy dane do wzoru (5) i otrzymujemy (8)

$$T = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{\frac{0{,}03}{20}} = 6{,}28 \cdot \sqrt{\frac{0{,}003}{20}} = 6{,}28 \cdot \sqrt{0{,}00015} \approx 0{,}08\, s \tag{8}$$

Przeliczenie jednostek:

$$\sqrt{\frac{kg}{\frac{N}{m}}} = \sqrt{\frac{kg}{\frac{\frac{kg \cdot m}{s^2}}{m}}} = \sqrt{\frac{kg}{\frac{kg}{s^2}}} = \sqrt{s^2} = s \tag{9}$$

<u>Odpowiedź</u>: Okres małych drgań ciała o masie m = 30 g zawieszonego na sprężynie o stałej k = 20 $\frac{N}{m}$ będzie wynosił 0,08 s.

<u>Zadanie 54.</u> (Wojciech Ferduła, 21.01.2018 r.)

Fala świetlna o długości λ = 650 nm ulega dyfrakcji na płycie kompaktowej, na której ścieżki odległe są o d = 1,5 µm. Ile wiązek obserwować można w świetle odbitym i jakie są ich kąty ugięcia?

Dane:

λ = 650 nm

d = 1,5 µm = 1500 nm

Szukane:

k=?

Wzór:

$$\sin \alpha_n = \frac{n\lambda}{d}$$

gdzie:

α_n – kąt ugięcia wiązki n-tego rzędu

n – rząd wiązki

d – stała siatki dyfrakcyjnej

λ – długość fali

Rozwiązanie:

Płyta kompaktowa spełnia w doświadczeniu rolę siatki dyfrakcyjnej. Fala padając na płytę ulega dyfrakcji i odbiciu. Dzięki temu możliwe jest obserwowanie wiązki różnych rzędów. Aby można było obserwować dany rząd wiązki, kąt ugięcia α_n musi być mniejszy niż 90°, a więc sin α_n musi być mniejszy od 1. Dodatkowo k musi być liczbą naturalną. Stąd:

$$\sin \alpha_n = \frac{n\lambda}{d} \tag{1}$$

$$\sin \alpha_n < 1 \tag{2}$$

$$\frac{n\lambda}{d} < 1$$

(3)

$$n < \frac{\mathrm{d}}{\lambda}$$

(4)

$$n < \frac{1500\mathrm{nm}}{650\mathrm{nm}}$$

(5)

$$n < 2{,}3$$

(6)

Przeliczenie jednostek

$$\frac{nm}{nm} = wielkość\ bezwymiarowa$$

Maksymalna całkowita wartość n wynosi 2 – możemy obserwować widmo 1. i 2. rzędu.

Obraz powstający na ekranie po przejściu fali przez siatkę dyfrakcyjną jest symetryczny, co oznacza, że mamy dwa widma każdego rzędu. Dodatkowo możemy obserwować obraz fali, która przeszła przez siatkę nie ulegając ugięciu (widmo 0 rzędu). Daje nam to w sumie 5 obrazów widma fali.

Ze wzoru (1) obliczyć można kąty ugięcia poszczególnych wiązek.

Dla wiązki 0:

$$\sin\alpha_0 = \frac{0 * 650\ \mathrm{nm}}{1500\ nm} = 0$$

(7)

$$\alpha_0 = 0°$$

(8)

Dla wiązki 1:

$$\sin\alpha_1 = \frac{1 * 650\ \mathrm{nm}}{1500\ nm} = 0{,}4(3)$$

(9)

$$\alpha_1 \approx 25{,}7°$$

(10)

Dla wiązki 2:

$$\sin \alpha_2 = \frac{2 * 650 \text{ nm}}{1500\ nm} = 0{,}8(6) \tag{11}$$

$$\alpha_2 \approx 60° \tag{12}$$

<u>Odpowiedź:</u> Obserwować można 5 wiązek o kontach kolejno 0°; 25,7° oraz 60°.

<u>Zadanie 57</u> (Wojciech Ferduła, 21.01.2018 r.)

Jaką energię (wyrażoną w eV) ma foton fali elektromagnetycznej o długości λ = 600 nm?

<u>Dane:</u>

$\lambda = 600 \text{ nm} = 600 * 10^{-9}$m

$h = 6{,}626 * 10^{-34}$ J*s

$c = 2{,}99792548 * 10^{8}$ m/s

<u>Szukane:</u>

E = ?

<u>Wzór:</u>

$$E = \frac{\text{hc}}{\lambda}$$

gdzie:

E– energia fotonu

h – stała Plancka

c – prędkość światła w próżni

λ – długość fali

Rozwiązanie:

Foton o określonej długości odpowiadającej mu fali (dualna natura światła) niesie ze sobą ściśle określoną energię określoną wzorem:

$$E = \frac{\mathrm{hc}}{\lambda}$$

(9)

$$E = \frac{6{,}626 * 10^{-34}\mathrm{J} * \mathrm{s} * 2{,}99792548 * 10^{8}\frac{\mathrm{m}}{s}}{600 * 10^{-9}m} \approx 3{,}310709 * 10^{-19}J$$

(10)

Przeliczenie jednostek

$$\frac{\mathrm{J} * \mathrm{s} * \frac{\mathrm{m}}{s}}{m} = \frac{\mathrm{J} * \cancel{\mathrm{s}} * \cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{m} * \cancel{s}} = \mathrm{J}$$

(11)

Zamiana jednostki energii z dżuli na elektronowolty:

$$1eV = 1{,}602 * 10^{-19}J$$

(12)

Stąd

$$E = \frac{3{,}310709 * 10^{-19}}{1{,}602 * 10^{-19}}eV \approx 2{,}06661eV$$

(13)

Odpowiedź: Energia fotonu fali elektromagnetycznej o długości λ = 600 nm wynosi 2,06661eV.

Zadanie 70 (Wojciech Ferduła, 26.01.2018 r.)

Proton o energii kinetycznej E_k = 10 keV krąży w płaszczyźnie prostopadłej do jednorodnego pola magnetycznego o indukcji B = 5 mT. Oblicz prędkość i promień orbity protonu.

Dane:

$E_k = 10\ \text{keV} = 10 \cdot 10^{-3}\ \text{eV} = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 16{,}02 \cdot 10^{-16}\ \text{J} = 1{,}602 \cdot 10^{-15}\ \text{J}$

B = 5 mT

$m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg

$q = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C

Szukane:

v = ?

r = ?

Wzór:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \tag{13}$$

$$F_d = \frac{mv^2}{r} \tag{14}$$

$$F_L = qvB \sin \alpha \tag{15}$$

Gdzie:

E_k – energia kinetyczna protonu

m – masa protonu

v – prędkość liniowa protonu

F_d = siła dośrodkowa działająca na proton

r – promień orbity protonu

F_L – siła Lorentza

q – ładunek protonu (ładunek elementarny)

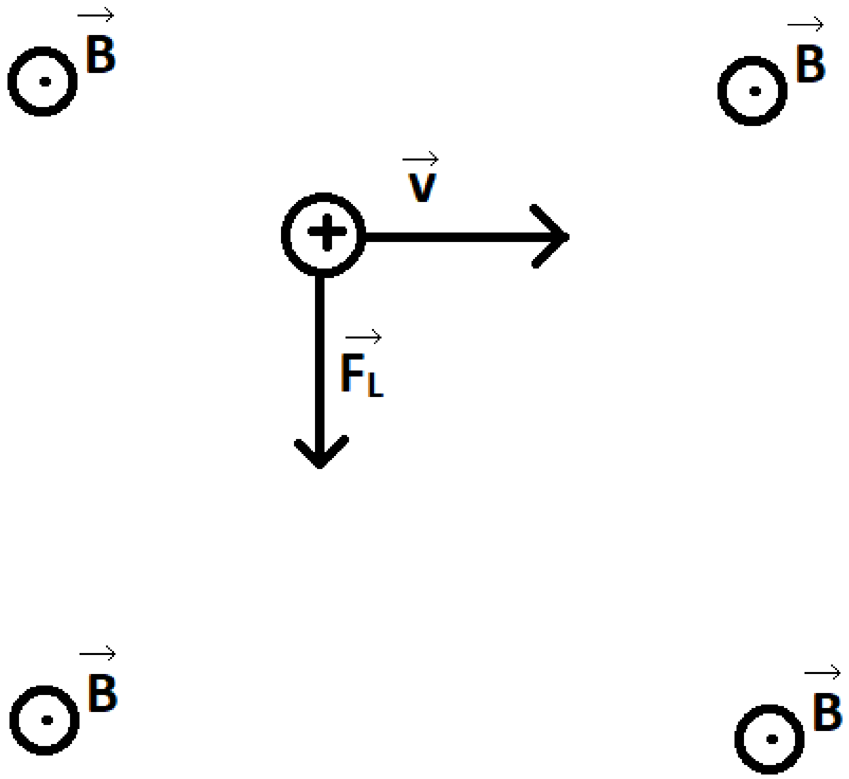
B – wartość indukcji pola magnetycznego

α – kąt między wektorem prędkości a wektorem indukcji magnetycznej

Rozwiązanie:

Na elektron poruszający się w polu magnetycznym działa siła Lorentza skierowana prostopadle do wektora prędkości. Proton więc krąży po okręgu. Rolę siły dośrodkowej spełnia siła Lorentza. Elektron posiada energię kinetyczną, która jest zależna od jego prędkości.

Sytuację opisaną w zadaniu ilustruje poniższy schemat:



Wzór 1:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

(16)

Po przekształceniu ze względu na prędkość:

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-15} J}{1{,}67 \cdot 10^{-27} kg}} \approx 1{,}385 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$$

(17)

Przeliczenie jednostek:

$$\left[\sqrt{\frac{J}{kg}} = \sqrt{\frac{\cancel{kg} \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m}{\cancel{kg}}} = \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{m}{s}\right]$$

Skoro rolę siły dośrodkowej pełni siła Lorentza to:

$$F_d = F_L$$

(18)

Podstawiając (2) i (3) do równania (6) otrzymujemy:

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \sin \alpha$$

(7)

Kąt α=90°, więc sinα=1, stąd równanie (7) upraszcza się do postaci:

$$\frac{mv^2}{r} = qvB$$

(8)

Mnożąc obustronnie przez $\frac{r}{qBv}$ otrzymujemy:

$$r = \frac{mv}{qB}$$

(9)

$$r = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} kg \cdot 1{,}385 \cdot 10^6 \frac{m}{s}}{1{,}607 \cdot 10^{-19} C \cdot 5 \cdot 10^{-3} T} = 2{,}879 m$$

(10)

Przeliczenie jednostek:

$$\left[\frac{kg \cdot \frac{m}{s}}{C \cdot T} = \frac{kg \cdot \frac{m}{s}}{A \cdot s \cdot \frac{V \cdot s}{m^2}} = \frac{kg \cdot m}{s} \cdot \frac{m^2}{A \cdot s^2 \cdot V} = \frac{N \cdot m^2}{s \cdot W} = \frac{\cancel{W} \cdot m}{\cancel{W}} = m\right]$$

Odpowiedź: Prędkość protonu wynosi około 1,385·10^6 m/s, a promień orbity protonu wynosi około 2,879 m.